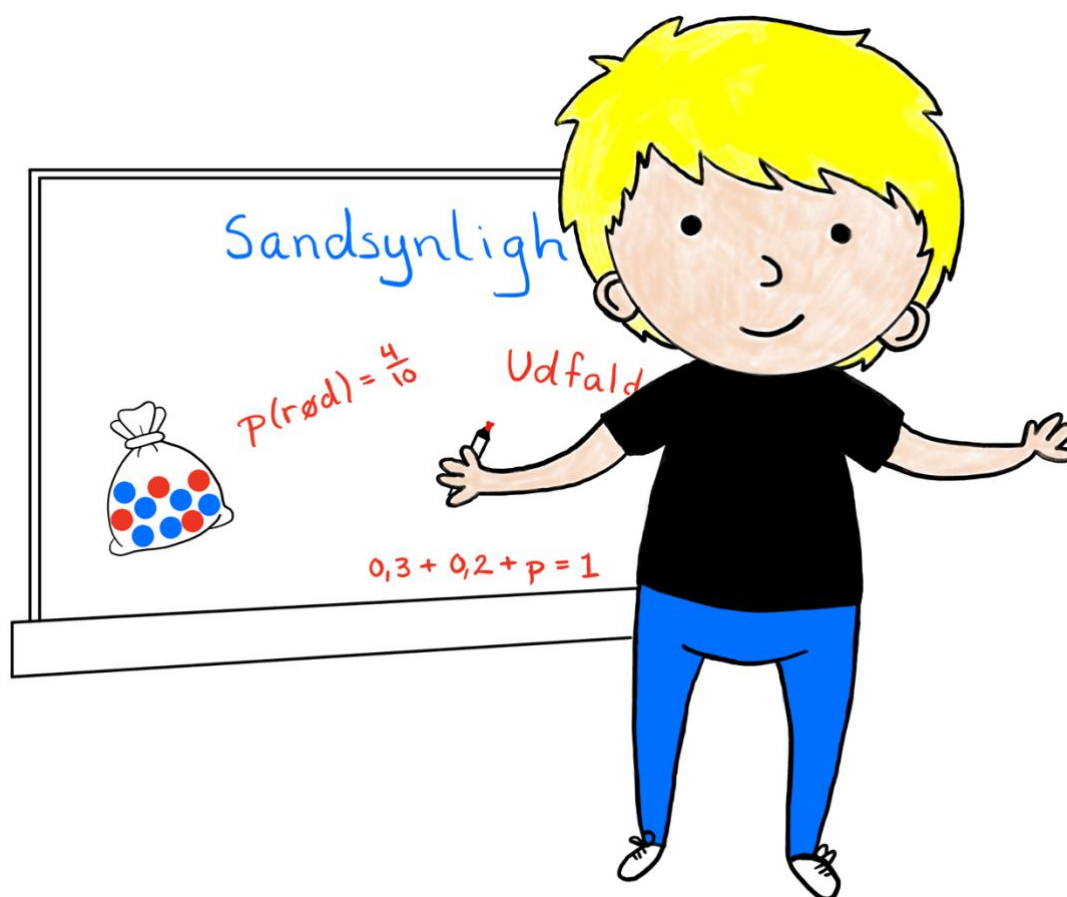


SCHACKS NOTER

KAPITEL 7 - SANDSYNLIGHEDSREGNING



Udarbejdet af Kristian Schack Blom, Århus Akademi

Fejlrettelser samt ris og ros bedes sendes til aaks@aarhusakademi.dk

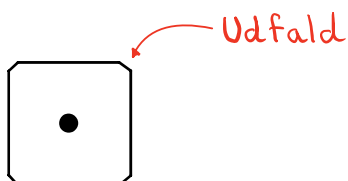
Den nyeste version af noterne kan altid findes på www.matematikC.dk

Indholdsfortegnelse

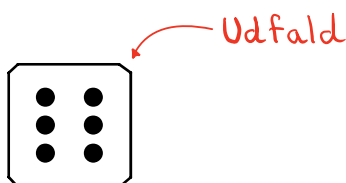
UDFALD OG UDFALDSRUM	2
SANDSYNLIGHEDSFELT OG SANDSYNLIGHEDSTABEL	3
HÆNDELSE	4
SYMMETRISK SANDSYNLIGHEDSFELT	5

UDFALD OG UDFALDSRUM

Lad os forestille os, at vi slår med en helt almindelig terning (kaldet en *ærlig* terning). Først slår vi en 1'er, hvilket er **udfaldet** af vores første terningekast:

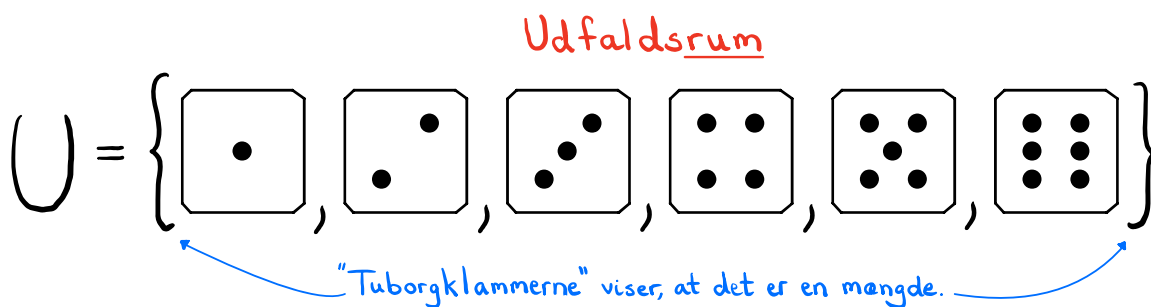


Derefter slår vi en 6'er, hvilket er udfaldet af vores andet terningekast:



Vores terningekast kan altså have forskellige udfald, nemlig at vi slår en 1'er, 2'er, 3'er, 4'er, 5'er eller 6'er.

Hvis vi ser på mængden af *mulige* udfald, så kan vi skrive det som $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dette kaldes **udfaldsrummet**.



 [YouTube Kort video om udfald og udfaldsrum.](#)

SANDSYNLIGHEDSFELT OG SANDSYNLIGHEDSTABEL

Et sandsynlighedsfelt er et udfaldsrum med tilhørende sandsynlighedsfunktion p , der tildeler hvert udfald en sandsynlighed mellem 0 og 1 (p 'et står for det engelsk ord for sandsynlighed, "Probability"). Løst sagt kan vi sige, at et sandsynlighedsfelt består af alle mulige udfald samt sandsynlighederne for disse udfald.

I tilfældet med terningekast har alle udfaldene sandsynligheden $\frac{1}{6}$.

Der gælder generelt, at summen af alle sandsynlighederne er 1. Kender vi derfor alle sandsynligheder på nær én, kan vi altid regne os frem til den sidste sandsynlighed:

$$p_1 + \overset{\text{Eneste ukendt}}{p_2} + p_3 + \dots + p_n = 1$$

$$p_2 = 1 - p_1 - p_3 - \dots - p_n$$

Træk alle andre sandsynligheder fra 1

Dette skal tit benyttes i eksamensopgaver om sandsynlighedsregning, hvilket ses neden for.

Hvis vi laver en tabel indeholdende alle udfald samt de tilhørende sandsynligheder, så kaldes dette en **sandsynlighedstabel**.

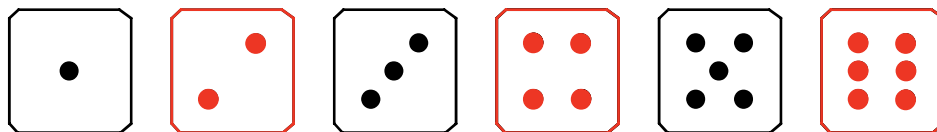
I eksemplet med terningekast vil sandsynlighedstabellen se således ud:

Udfald						
Sandsynlighed	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

 [Kort video om sandsynlighedsfelt og sandsynlighedstabel.](#)

HÆNDELSE

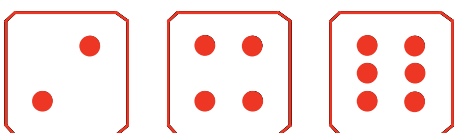
En **hændelse** A er en delmængde af udfaldsrummet. En hændelse kan eksempelvis være, at vi slår et lige antal øjne med vores terning:



Dermed ser delmængden A således ud:

$$A = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \right\}$$

Sandsynligheden $p(A)$ for en hændelse er summen af alle de udfalds sandsynligheder, der er knyttet til hændelsen.


$$p(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

 [YouTube Kort video om hændelser.](#)

SYMMETRISK SANDSYNLIGHEDSFELT

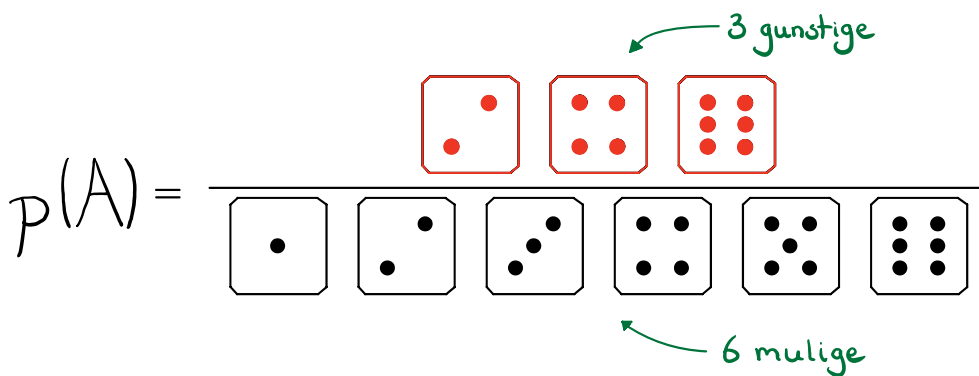
I et symmetrisk sandsynlighedsfelt er alle sandsynligheder lige store. Hvis vi slår med en almindelig 6-sidet terning, er der tale om et symmetrisk sandsynlighedsfelt, da alle udfaldene har sandsynligheden $\frac{1}{6}$.

Generelt gælder der, at **hvert udfald har sandsynligheden $\frac{1}{n}$** , hvis det symmetriske sandsynlighedsfelt har et **udfaldsrum med n udfald**.

Sandsynligheden for en hændelse A bestående af k udfald i et udfaldsrum U med n udfald kan udregnes med følgende formel:

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{Antal gunstige}}{\text{Antal mulige}}$$

I eksemplet med hændelsen, at vi slår et lige antal øjne med vores terning, er der 3 gunstige udfald ud af i alt 6 udfald. Derfor er sandsynligheden $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$:



 [Kort video om symmetrisk sandsynlighedsfelt.](#)

Hos blodbanken på Skejby Sygehus er blodtyperne blandt de første 100 donorer på en dag fordelt som vist i nedenstående skema.

Blodtype	A	B	AB	0
Antal donorer	42	12	6	40

På tilfældig måde vælges én person blandt de 100 donorer.

a) Bestem sandsynligheden for, at personen ikke har blodtype 0.

a) Jeg skal bestemme sandsynligheden $p(\text{ikke blodtype 0})$, og jeg benytter mig af

$$p(A) = \frac{\text{Antal gunstige udfald}}{\text{Antal mulige udfald}}.$$

Jeg kan se, at der er $42 + 12 + 6 + 40 = 100$ mulige udfald, mens der er $42 + 12 + 6 = 60$ gunstige udfald.

Derfor er sandsynligheden $p(\text{ikke blodtype 0}) = \frac{60}{100} = 0,60 = 60\%$.

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)

En skæv seks-sidet terning kastes én gang. Tabellen viser sandsynlighederne for fem af de seks udfald.

Udfald	1	2	3	4	5	6
Sandsynlighed	0,13	0,20	0,18		0,25	0,04

- Bestem den manglende sandsynlighed i tabellen.
- Bestem sandsynligheden for, at udfaldet bliver et lige tal.

a) Jeg kalder den manglende sandsynlighed for p , og da jeg ved, at summen af alle sandsynligheder er 1, gælder der følgende:

$$0,13 + 0,20 + 0,18 + p + 0,25 + 0,04 = 1, \text{ så } p = 1 - 0,13 - 0,20 - 0,18 - 0,25 - 0,04 = 0,20 = 20\%$$

Altså er den manglende sandsynlighed lig med 20%.

b) Jeg skal nu bestemme sandsynligheden for, at udfaldet bliver et lige tal.

Jeg lægger derfor sandsynlighederne for udfaldene 2, 4 og 6 sammen:

$$p(\text{lige tal}) = 0,20 + 0,20 + 0,04 = 0,44 = 44\%.$$

Altså er sandsynligheden for, at udfaldet bliver et lige tal 44%.

 [Kort gennemgang af opgaven.](#)

I et spil kastes en mønt og en terning samtidigt.

Reglerne i spillet er:

Viser mønten "Krone", er udfaldet det øjental, som terningen viser.

Viser mønten "Plat", er udfaldet det dobbelte af det øjental, som terningen viser.

Nedenstående tabel viser en ufærdig opstilling af de mulige udfald i spillet.

						
"Krone"		2				
"Plat"		4				

- a) Udfyld resten af tabellen på bilaget, og bestem sandsynligheden for, at spillets udfald bliver mindre end 5.

- a) Jeg skal bestemme sandsynligheden $p(\text{mindre end } 5)$, og jeg benytter mig af

$$p(A) = \frac{\text{Antal gunstige udfald}}{\text{Antal mulige udfald}}.$$

Der er i alt 12 mulige udfald og 6 gunstige udfald (markeret med røde cirkler på bilaget), så $p(\text{mindre end } 5) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Altså er sandsynligheden for, at spillets udfald bliver mindre end 5 lig med 50 %.

						
"Krone"	1	2	3	4	5	6
"Plat"	2	4	6	8	10	12

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)

Nedenstående tabel viser alle gevinsterne i et spil og de tilhørende sandsynligheder.

Gevinst (kr.)	5	10	20	50
Sandsynlighed	p	0,54	0,15	0,20

a) Bestem sandsynligheden p .

Man kan beregne den gennemsnitlige gevinst i spillet ved først at gange hver gevinst med den tilhørende sandsynlighed og herefter lægge de fire resultater sammen.

b) Beregn den gennemsnitlige gevinst i spillet ved at benytte den beskrevne metode.

a)

Jeg skal bestemme sandsynligheden p . Da jeg ved, at summen af alle sandsynligheder er 1, gælder følgende:

$$p + 0,54 + 0,15 + 0,20 = 1$$



Ligningen løses for p vha. WordMat.

$$p = 0,11$$

Altså er p lig med $0,11 = 11\%$.

b)

Jeg skal nu bestemme den gennemsnitlige gevinst i spillet ved først at gange hver gevinst med den tilhørende sandsynlighed og herefter lægge de tre resultater sammen:

$$5 \cdot 0,11 + 10 \cdot 0,54 + 20 \cdot 0,15 + 50 \cdot 0,20 = 18,95$$

Altså er den gennemsnitlige gevinst i spillet **18,95 kroner**.

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)