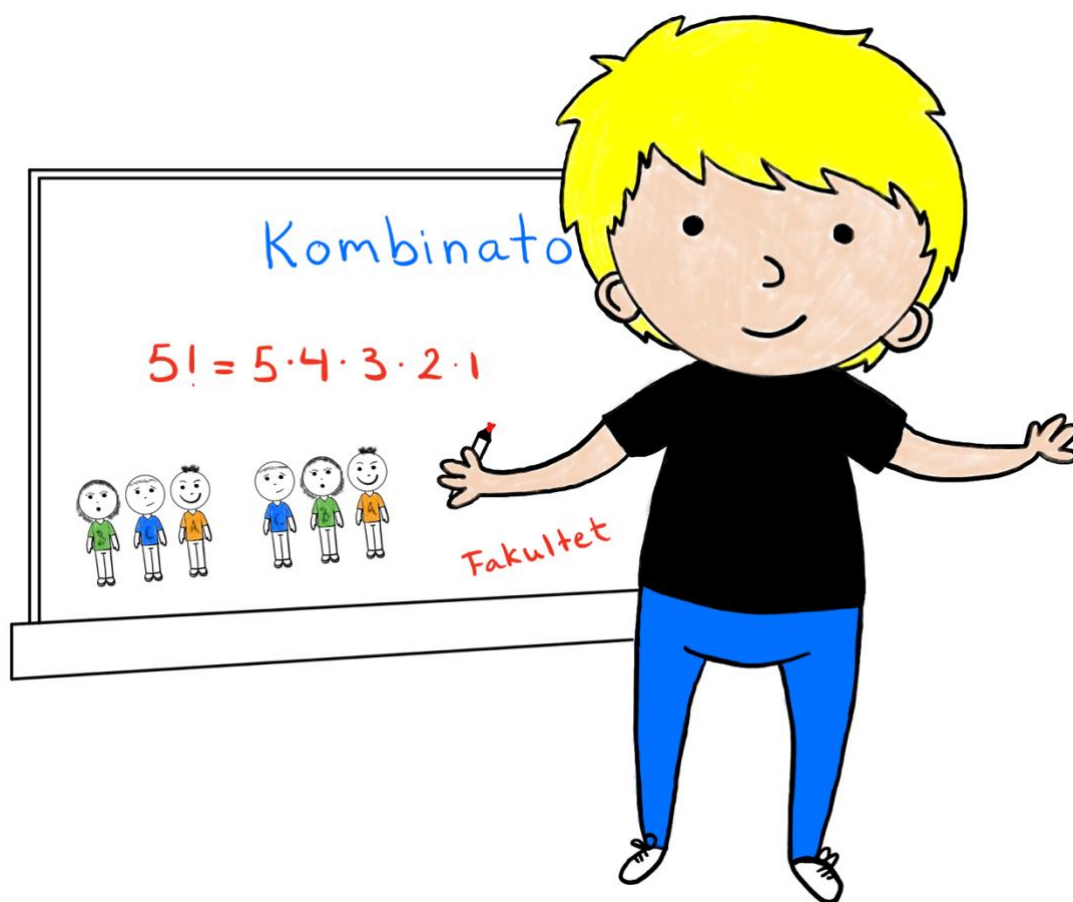


SCHACKS NOTER

KAPITEL 8 - KOMBINATORIK



Udarbejdet af Kristian Schack Blom, Århus Akademi

Fejlrettelser samt ris og ros bedes sendes til aaks@aarhusakademi.dk

Den nyeste version af noterne kan altid findes på www.matematikC.dk

Indholdsfortegnelse

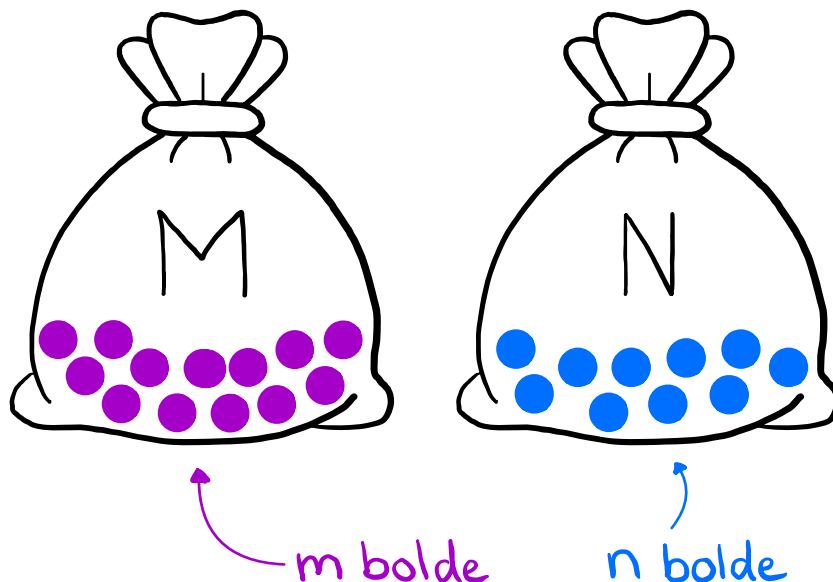
MULTIPLIKATIONSPRINCIPPET OG ADDITIONSPRINCIPPET	2
MULTIPLIKATIONSPRINCIPPET OG SANDSYNLIGHEDER	5
FAKULTET	7
PERMUTATION (SUPPLERENDE STOF)	8
KOMBINATION	9
KOMBINATION OG SANDSYNLIGHED (SUPPLERENDE STOF)	11

MULTIPLIKATIONSPRINCIPPET OG ADDITIONSPRINCIPPET

I kombinatorik gælder to meget vigtige regler: **Multiplikationsprincippet** og **additionsprincippet**.

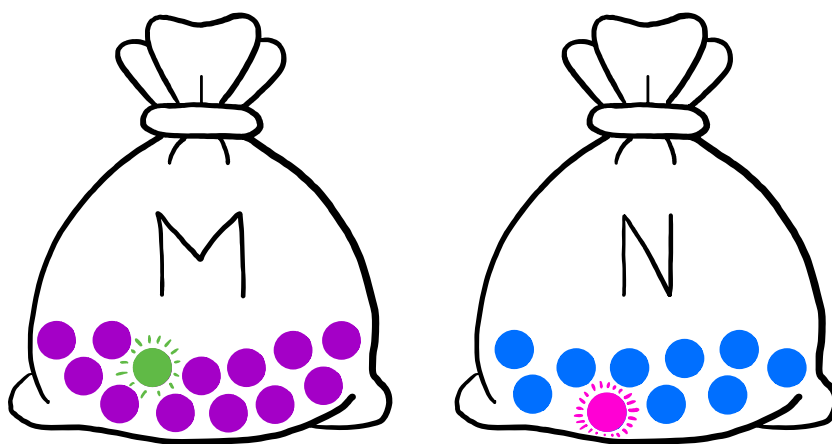
Lad os forestille os, at vi har en mængde kaldet M , der indeholder m elementer, samt en mængde N , der indeholder n elementer.

Det svarer lidt til at have en sæk med m bolde og en sæk med n bolde:



Multiplikationsprincippet siger, at hvis vi skal vælge **både** et element fra mængden M **og** et element fra mængden N , så kan det gøres på $m \cdot n$ forskellige måder. Vi ganger altså antallet af elementer i mængden M med antallet af elementer i mængden N (multiplikation betyder at gange).

I forhold til vores to sække skal vi **både** tage en bold fra den ene sæk **og** tage en bold fra den anden sæk:

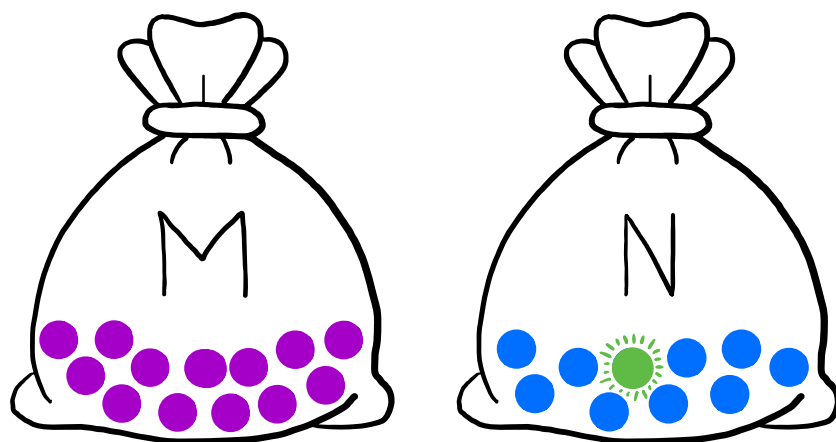


Vi har jo m valgmuligheder i den ene sæk, og for hver valgmulighed har vi derefter n valgmuligheder i den anden sæk. Derfor skal m og n ganges med hinanden.

Multiplikationsprincippet kaldes også **både-og-princippet**.

Additionssprincippet siger, at hvis vi skal vælge **enten** et element fra mængden **M** **eller** et element fra mængden **N**, så kan det gøres på $m + n$ forskellige måder. Vi lægger altså antallet af elementer i mængden **M** sammen med antallet af elementer i mængden **N** (addition betyder at lægge sammen).

I forhold til vores to sække skal vi **enten** tage en bold fra den ene sæk **eller** tage en bold fra den anden sæk:



Da vi kun skal tage en enkelt bold, så giver det god mening, at vi har $m + n$ valgmuligheder i alt.

Additionssprincippet kaldes også **enten-eller-princippet**.

 [YouTube Kort video om bestemmelse af multiplikationsprincippet og additionsprincippet.](#)

EKSEMPEL

Vi skal ud at spise på Madklubben, og menukortet ser således ud:

Forret

1. Rørt oksetatar
2. Grillet gedeost
3. Yuzu-saltet hvid fisk

Hovedret

1. Bøf bearnaise
2. Velfærdsgris
3. Spicy butter chicken
4. Lammekebab

Dessert

1. Mørk chokolade
2. Passion sundae

Hvis vi skal have **både** en forret **og** en hovedret **og** en dessert, kan vi kombinere menuen på $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ måder.

Hvis vi skal have **enten** en forret **eller** hovedret, kan vi kombinere menuen på $3 + 4 = 7$ måder.

Hvis vi skal have **enten** en forret **eller** hovedret **og** derefter en dessert, kan vi kombinere menuen på $(3 + 4) \cdot 2 = 14$ måder.

 [YouTube Kort gennemgang af eksemplet.](#)

Anna og Johannes skal spise på restaurant. De kan vælge mellem 3 forskellige forretter, 5 forskellige hovedretter og 4 forskellige desserter på menukortet.

Hvis de vælger to retter, skal de enten bestille én forret og én hovedret eller bestille én hovedret og én dessert.

a) På hvor mange måder kan Anna og Johannes vælge de to retter?

- a) Hvis de skal bestille både én forret og én hovedret, kan jeg ved hjælp af multiplikationsprincippet udregne, at det kan gøres på $3 \cdot 5 = 15$ forskellige måder.
- Hvis de skal bestille både én hovedret og én dessert, kan jeg ved hjælp af multiplikationsprincippet udregne, at det kan gøres på $5 \cdot 4 = 20$ forskellige måder.
- Da de enten skal bestille én forret og en hovedret eller bestille én hovedret og én dessert, kan jeg ved hjælp af additionsprincippet udregne, at det kan gøres på $20 + 15 = 35$ forskellige måder.

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)

MULTIPLIKATIONSPRINCIPPET OG SANDSYNLIGHEDER

Multiplikationsprincippet kan også bruges til at udregne sandsynligheder, **hvis** to hændelser er uafhængige af hinanden (altså må den ene hændelse ikke påvirke den anden).

Sandsynligheden for, at **både** den ene hændelse **og** den anden hændelse indtræffer, fås ved at **gange** sandsynligheden for den første hændelse med sandsynligheden for den anden hændelse.

EKSEMPEL

Vi slår med en 6-sidet ærlig terning to gange. Vi skal bestemme sandsynligheden for **både** at slå en 6'er i første kast **og** et lige antal øjne i andet kast.

Sandsynligheden for at slå en 6'er er $\frac{1}{6}$ og sandsynligheden for at slå et lige antal øjne er $\frac{1}{2}$.

De to hændelser er uafhængige af hinanden, så vi bruger multiplikationsprincippet og udregner sandsynligheden ved at gange de to sandsynligheder sammen:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

 [Kort video om multiplikationsprincippet og sandsynligheder.](#)

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #8.2 (DELPRØVE 1)

En gruppe elever spiller et spil, hvor de kaster med en forfalsket seks-sidet terning. Sandsynligheden for de seks mulige øjental fremgår af tabellen.

Øjental	1	2	3	4	5	6
Sandsynlighed	0,20	0,20	0,10	0,10	0,30	0,10

- a) Bestem sandsynligheden for, at den forfalskede terning viser et ulige øjental.

I spillet benyttes den forfalskede terning sammen med en symmetrisk (ærlig) seks-sidet terning. Begge terninger kastes én gang.

- b) Bestem sandsynligheden for, at begge terninger viser et ulige øjental.

- a) Jeg skal bestemme sandsynligheden for, at den forfalskede terning viser et ulige antal.

Jeg lægger derfor sandsynlighederne for udfaldene 1, 3 og 5 sammen:

$$p(\text{ulige øjental}) = 0,20 + 0,10 + 0,30 = 0,60 = 60\%.$$

Altså er sandsynligheden for, at den forfalskede terning viser et ulige antal 60%.

b) Jeg skal nu bestemme sandsynligheden for, at begge terninger viser et ulige øjental.

Sandsynligheden for at den ærlige terning skal vise et ulige øjental, er 0,50.

Da både den forfalskede terning og den ærlige terning skal vise et ulige øjental, skal jeg bruge multiplikationsprincippet og gange de to sandsynligheder sammen:

$$p(\text{begge terninger viser et ulige øjental}) = 0,60 \cdot 0,5 = 0,30 = 30\%.$$

Altså er sandsynligheden for, at begge terninger viser et ulige øjental 30 %.

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #8.3 (DELPRØVE 2)

I et spil kan man få 0, 5, 10, 15 eller 20 point. Tabellen viser sandsynlighederne for at opnå pointene.

Point	0	5	10	15	20
Sandsynlighed	0,32	0,12	0,30	0,21	p

a) Bestem sandsynligheden p .

Spillet spilles nu 2 gange.

b) Bestem sandsynligheden for at få 20 point både i det første spil og i det andet spil.

a)

Jeg skal bestemme sandsynligheden p . Da jeg ved, at summen af alle sandsynligheder er 1, gælder følgende:

$$0,32 + 0,12 + 0,30 + 0,21 + p = 1$$



Ligningen løses for p vha. WordMat.

$$p = 0,05$$

Altså er sandsynligheden p lig med $0,05 = 5\%$.

b)

Spillet spilles 2 gange, og jeg skal bestemme sandsynligheden for at få 20 point **både** i det første spil **og** i det andet spil. Jeg bruger multiplikationsprincippet og ganger de to sandsynligheder sammen:

$$0,05 \cdot 0,05 = 0,0025 = 0,25\%$$

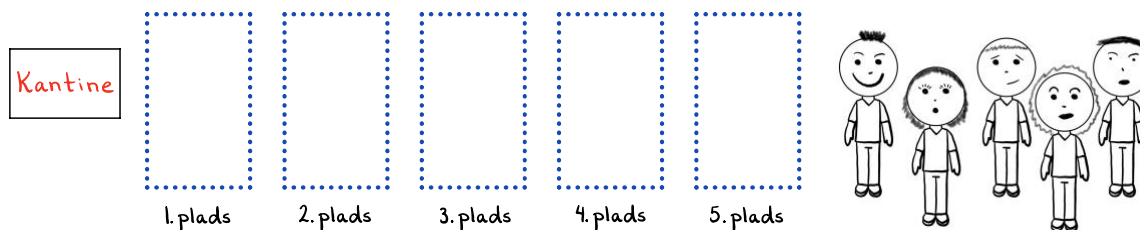
Altså er sandsynligheden for at få 20 point både i det første spil og i det andet spil lig med $0,25\%$.

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)

FAKULTET

Vi forestiller os, at der er fem elever, der skal stille sig i rækkefølge i en kø til kantinen.

På hvor mange måder kan vi gøre det på?



På 1. plads skal vi placere én af de **5** elever.

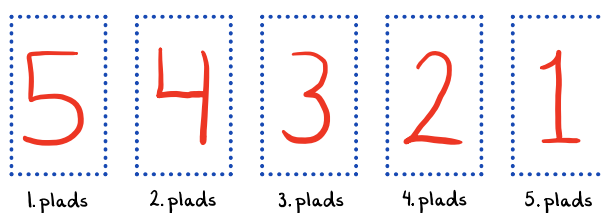
På 2. plads skal vi placere én af de tilbageværende **4** elever.

På 3. plads skal vi placere én af de tilbageværende **3** elever.

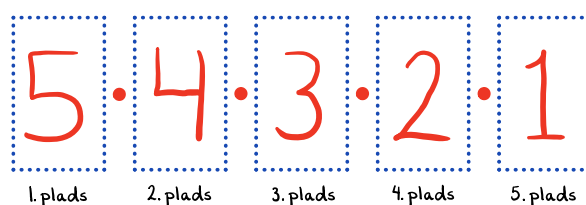
På 4. plads skal vi placere én af de tilbageværende **2** elever.

På 5. plads er det kun én mulighed, da der kun er **1** tilbageværende elev.

Altså ser vores muligheder således ud:



Da vi **både** skal have én på 1. plads **og** én på 2. plads, osv., skal vi benytte **multiplikationsprincippet**:



Tallet hedder $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ og udtales "fem fakultet". Generelt gælder der:

Hvis vi skal sætte n elementer i rækkefølge, kan det gøres på $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$ forskellige måder. Man har desuden bestemt, at $0! = 1$.

EKSEMPLER

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

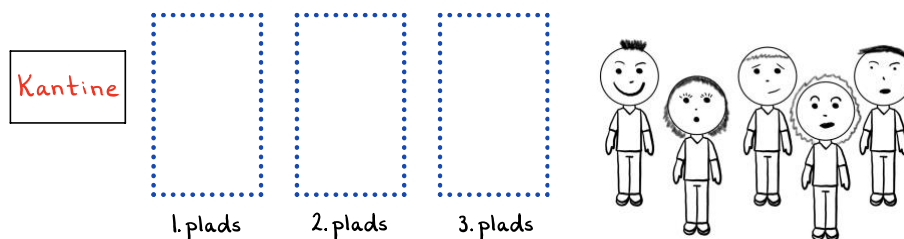
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

 [Kort video om fakultet samt eksemplerne.](#)

PERMUTATION (SUPPLERENDE STOF)

Lad os forestille os, at vi igen sender fem elever til kantinen, men nu er det kun tre elever, der skal stille sig i kø, mens de to sidste kan tage sig et spil bordtennis. På hvor mange måder kan vi placere tre ud af fem elever i en kø?

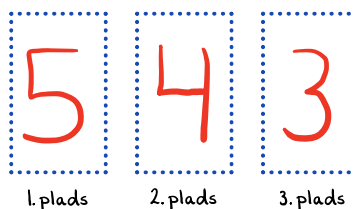


På 1. plads skal vi placere én af de **5** elever.

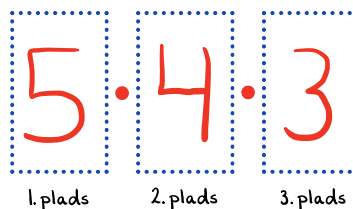
På 2. plads skal vi placere én af de tilbageværende **4** elever.

På 3. plads skal vi placere én af de tilbageværende **3** elever.

De to sidste går så ind og spiller bordtennis. Altså ser vores muligheder således ud:



Vi benytter igen multiplikationsprincippet:



Dette er jo ikke længere $5!$, da vi har fjernet de to sidste faktorer ($2 \cdot 1$). Vi kan alligevel skrive udtrykket ved hjælp af fakultet:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Dette kan også skrives som $\frac{5!}{(5-3)!}$. Vi har altså udvalgt **3** ud af **5** elever og sat dem i rækkefølge, og det kan gøres på 60 forskellige måder. Generelt gælder der:

Hvis vi skal udvælge **r** elementer fra en mængde på **n** elementer og sætte dem i **rækkefølge**, kan det gøres på $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ forskellige måder. P står i dette tilfælde for **permutation**.

EKSEMPEL

På en boghylde stå 6 bøger. Vi har kun tid til at læse 3 af bøgerne i sommerferien, og rækkefølgen, vi læser bøgerne i, har betydning. Derfor kan det gøres på $P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ forskellige måder.

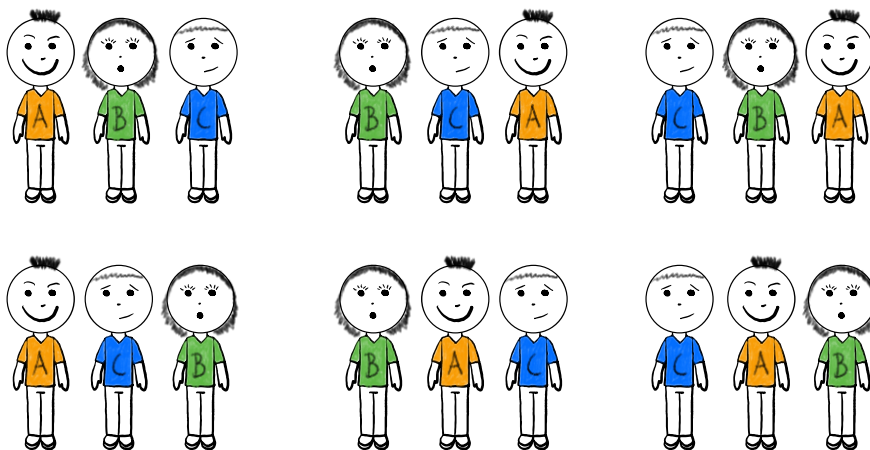
 [Kort video om permutation samt eksemplet.](#)

[Til toppen](#)

KOMBINATION

Lad os blive ved eksemplet med de fem elever, der bliver sendt til kantinen. Vi vil stadigvæk placere tre af eleverne i køen, men nu er det ligegyldigt, hvor de står i køen. **Rækkefølgen har altså ikke længere nogen betydning.**

Der vil nu være væsentligt færre forskellige måder at udvælge de tre elever på, for hvis vi eksempelvis vælger de tre elever **A**, **B** og **C**, så er følgende situationer ens, når rækkefølgen ikke har betydning:



Hvor vi tidligere så, at der var 60 forskellige måder, vi kunne udvælge tre ud af fem elever og sætte dem i rækkefølge, skal vi nu dividere dette antal med 6 ($= 3!$), når rækkefølgen ikke har betydning. Som vi lige har set med eksemplet med de tre elever **A**, **B** og **C**, så er seks situationer jo ens, når rækkefølgen ikke har betydning, og det ville også være tilfældet, hvis det var en anden udvælgelse af tre elever blandt de fem.

Vi kan derfor vælge **3** elever ud af **5**, når rækkefølgen ikke har betydning, på $\frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$ forskellige måder.

Generelt gælder der:

Hvis vi skal udvælge **r** elementer fra en mængde på **n** elementer og **rækkefølge ikke har betydning**, kan det gøres på $K(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ forskellige måder. **K** står for **kombination**.

EKSEMPEL

Der er 10 sange på en Spotify-playliste, men vi har kun tid til at høre 5 sange, og rækkefølgen har ikke betydning. Vi kan vælge 5 ud af 10 sange på $K(10, 5) = \frac{10!}{(10-5)! \cdot 5!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$ forskellige måder.

 [Kort video om kombination samt eksemplet.](#)

Hos tøjbutikken Shaping New Tomorrow kan man købe 7 slags t-shirts. Bilal vil købe 2 forskellige t-shirts.

a) På hvor mange måder kan Bilal vælge 2 t-shirts?

a) Jeg skal bestemme antallet af måder, Bilal kan udvalge 2 t-shirts ud af 7.

Jeg benytter formelen $K(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$, da rækkefølgen ikke har betydning.

Jeg ved, at $n=7$ og $r=2$, så jeg indsætter tallene:

$$K(7,2) = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

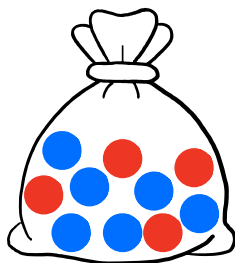
Altså kan Bilal vælge 2 t-shirts på 21 forskellige måder.

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)

KOMBINATION OG SANDSYNLIGHED (SUPPLERENDE STOF)

Vi har nu set på fakultet, permutation og kombination i forbindelse med kombinatorik. Vi kan dog også bruge sidstnævnte i situationer, hvor vi skal bestemme sandsynligheder, hvilket nedenstående eksempel vil vise:

Lad os forestille os, at vi har en sæk med 10 bolde, hvor 4 er røde og 6 er blå. Vi skal nu trække 2 bolde op af sækken, og vi vil gerne bestemme sandsynligheden for, at begge bolde er røde.



Først udregner vi antallet af mulige måder, vi kan tage 2 bolde ud af 10 bolde i sækken.

Da rækkefølgen ikke har nogen betydning, ser udregningen således ud:

$$K(10,2) = \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{90}{2} = 45$$

Vi kan altså tage 2 bolde ud af de 10 bolde i sækken på 45 måder. **Det er antallet af mulige måder, vi kan tage 2 bolde ud af de 10 bolde.**

Men vi vil jo gerne tage 2 røde bolde, så vi udregner antallet af måder, vi kan tage 2 røde bolde, og da der er 4 røde bolde i sækken, kan dette gøres på $K(4,2)$ forskellige måder:

$$K(4,2) = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

Altså er der 6 måder, vi kan tage 2 røde bolde. **Det er antallet af gunstige måder, vi kan tage 2 røde bolde ud af de 10 bolde.**

Sandsynligheden er derfor:

$$P(2 \text{ røde bolde}) = \frac{K(4,2)}{K(10,2)} = \frac{6}{45}$$

 [Kort video om kombination og sandsynlighed.](#)