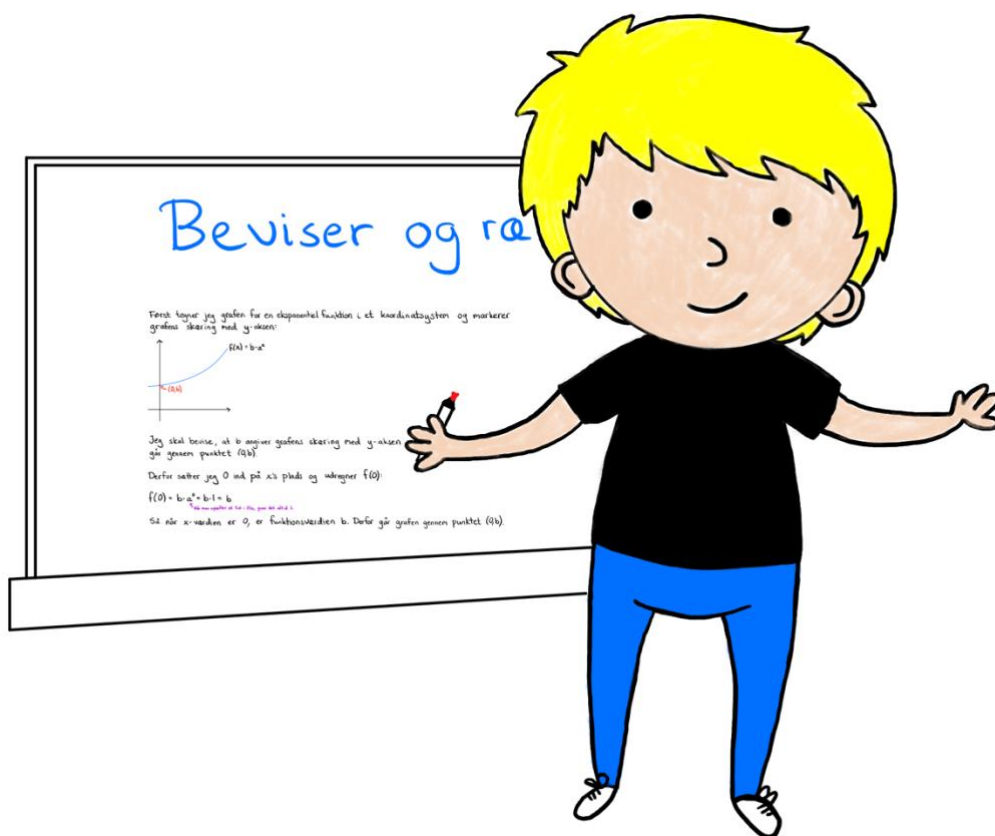


SCHACKS NOTER

KAPITEL 10 - RÆSONNEMENTER OG BEVISER



Udarbejdet af Kristian Schack Blom, Århus Akademi

Fejlrettelser samt ris og ros bedes sendes til aaks@aarhusakademi.dk

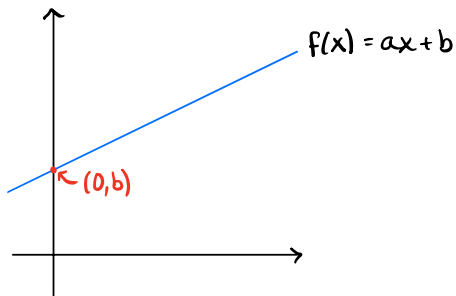
Den nyeste version af noterne kan altid findes på www.matematikC.dk

Indholdsfortegnelse

LINEÆRE FUNKTIONER	2
TRIGONOMETRI	4
PROCENT- OG RENTESREGNING	11
EKSPONENTIELLE FUNKTIONER	13
KOMBINATORIK	16
SANDSYNLIGHEDSREGNING	17

I en lineær funktion $f(x) = ax + b$ angiver b grafens skæring med y -aksen
- altså går grafen gennem punktet $(0, b)$

Først tegner jeg grafen for en lineær funktion i et koordinatsystem og markerer grafens skæring med y -aksen:



Jeg skal bevise, at b angiver grafens skæring med y -aksen - altså at grafen går gennem punktet $(0, b)$.

Derfor sætter jeg 0 ind på x 's plads og udregner $f(0)$:

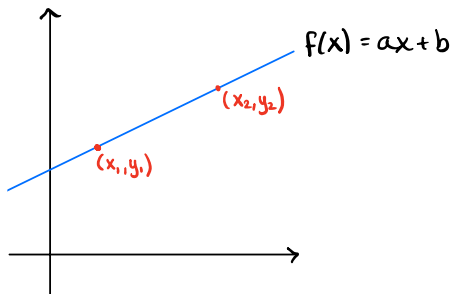
$$f(0) = a \cdot 0 + b = 0 + b = b$$

Så når x -værdien er 0 , er funktionsværdien b . Derfor går grafen gennem punktet $(0, b)$.

 [YouTube Gennemgang af bevis.](#)

Hvis vi kender 2 punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) på grafen for en lineær funktion, kan vi bestemme a og b med formlerne $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ og $b = y_1 - ax_1$

Først tegner jeg grafen for en lineær funktion i et koordinatsystem og indtegner de to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) :



Fordi punkterne ligger på grafen, så gælder der, at hvis jeg indsætter x_1 på x 's plads i forskriften, så får jeg funktionsværdien y_1 , og hvis jeg indsætter x_2 på x 's plads i forskriften, så får jeg funktionsværdien y_2 . Der gælder altså:

$$y_1 = a \cdot x_1 + b \quad (\text{Ligning 1})$$

$$y_2 = a \cdot x_2 + b \quad (\text{Ligning 2})$$

Her har jeg to ligninger med to ubekendte (nemlig a og b), men jeg ønsker at have én ligning med én ubekendt (nemlig a).

En smart måde at gøre det på er at trække venstre side af ligning 1 fra venstre side af ligning 2, og gør det samme på højre side:

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = ax_2 - ax_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

Husk (minus)parentesen. Vi reducerer ved at fjerne b'erne.
 Parentesen hæves ved at ændre fortegnene på alle led i parentesen. a er en fælles faktor, da der bliver ganget med a i begge led. Vi kan derfor sætte a udenfor en parentes.

Nu har jeg netop én ligning med én ubekendt:

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

Hvis jeg dividerer med $x_2 - x_1$ på begge sider af lighedstegnet, isolerer jeg a :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Nu har jeg fundet formelen for a , og jeg finder formelen for b ved at isolere b i ligning 1 ($y_1 = a \cdot x_1 + b$). Det gør jeg ved at trække ax_1 fra på begge sider af lighedstegnet:

$$y_1 - ax_1 = b$$

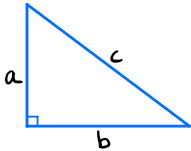
Jeg har nu fundet formlerne for a og b .

[Gennemgang af bevis.](#)

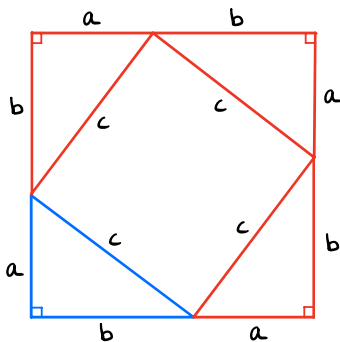
TRIGONOMETRI

I en retvinklet trekant ABC , hvor C er ret, gælder Pythagoras Sætning: $a^2 + b^2 = c^2$

Først tegner jeg en retvinklet trekant med siderne a , b og c , hvor c er hypotenusen.



Jeg tegner nu trekanten 3 gange mere. Hver gang drejer jeg trekanten 90° , så jeg ender med denne figur:



På figuren er der 2 firkanter (en lille og en stor), og jeg vil argumentere for, at begge firkanter er kvadrater (det skal bruges senere).

Den store firkant



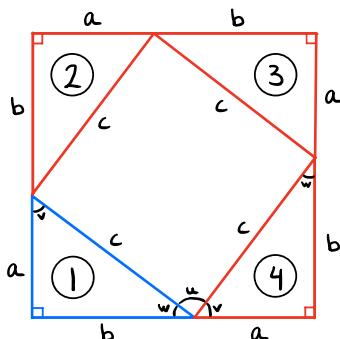
Alle fire hjørner er retvinklede, og alle 4 sider er lige lange ($a+b$ lange). Derfor er den store firkant et kvadrat.

Den lille firkant



I den lille firkant er alle siderne lige lange (c lange).

Tilbage er at vise, at alle hjørnerne i den lille firkant er retvinklede.



Jeg ser først på trekant ①, hvor jeg kalder den ene spidse vinkel for v og den anden for w . Vinkelsummen i en trekant er 180° , og da den rette vinkel er 90° , må de 2 andre tilsammen være 90° :

$$v + w = 90^\circ.$$

Jeg ser nu på trekant ④, og navngiver de 2 spidse vinkler ligesom i trekant ①.
 Jeg kalder nu vinklen i den lille firkant for u , og da vinkelsummen i en halvcirkel er 180° , får jeg, at:

$$u + \underbrace{v + w}_{90^\circ} = 180^\circ.$$

Altså må u være 90° .

Jeg har nu vist, at vinklen er 90° , og jeg kan bruge samme fremgangsmåde ved de andre vinkler i firkanten og vise, at de alle er 90° .

Derfor er den lille firkant også et kvadrat.

Jeg vil nu udregne arealet af den store firkant  på 2 forskellige måder.

Metode 1

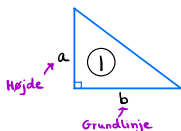
Jeg finder arealet af den store firkant ved at gange 2 sider med hinanden.
 Det kan jeg gøre, fordi jeg har vist, at den store firkant er et kvadrat.

$$\text{Areal} = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2.$$

Metode 2

Jeg finder nu arealet af den store firkant ved at finde arealerne for de 4 trekanter og lægge det sammen med arealet af den lille firkant.

Arealet af trekant ①:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \text{højde} \cdot \text{grundlinje} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$


Der er jo 4 ens trekanter, så trekanternes samlede areal er:

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 2ab.$$

Arealet af den lille firkant findes ved at gange 2 sider med hinanden.

Det kan jeg gøre, fordi jeg har vist, at den lille firkant er et kvadrat.

$$c \cdot c = c^2.$$

Det samlede areal for det store kvadrat finder jeg ved at lægge arealerne af de 5 figurer sammen:

$$\text{Areal} = 2ab + c^2.$$

Jeg har nu udregnet arealet af det store kvadrat på 2 forskellige måder.
Men lige meget hvilken metode jeg bruger, må arealet jo være det samme.
Derfor sætter jeg resultaterne fra de 2 metoder lig med hinanden:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2.$$

Jeg trækker nu $2ab$ fra på begge sider:

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 - \cancel{2ab} = \cancel{2ab} + c^2 - \cancel{2ab}.$$

Tilbage står det, jeg skulle vise, nemlig:

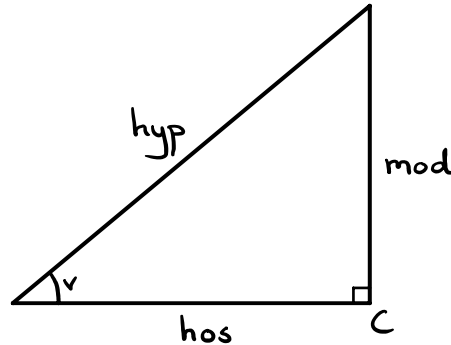
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

 [YouTube Gennemgang af bevis.](#)

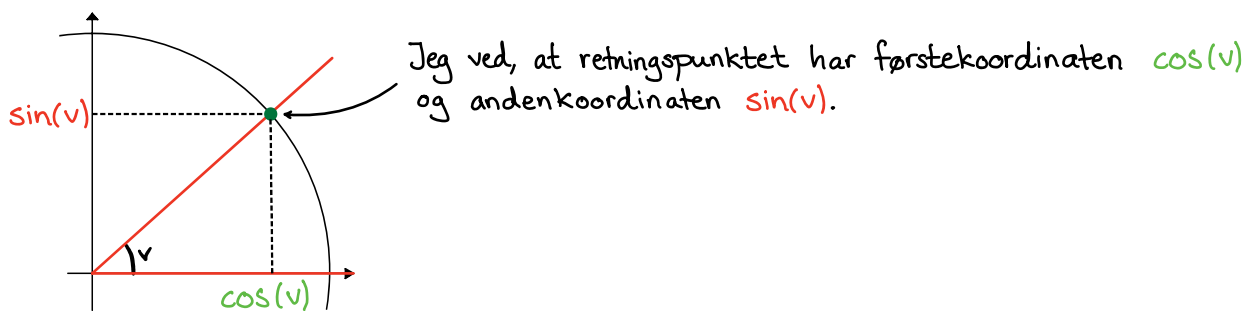
Formlerne for sinus, cosinus og tangens til en spids vinkel i en retvinklet trekant er givet ved

$$\sin(v) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}}, \cos(v) = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}} \text{ og } \tan(v) = \frac{\text{mod}}{\text{hos}}$$

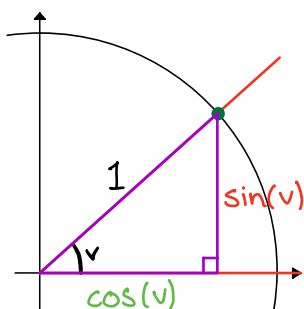
Først tegner jeg en retvinklet trekant med en spids vinkel v og navngiver siderne i forhold til vinklen v :



Jeg benytter nu enhedscirklen, hvor jeg placerer et højre ben med begyndelse i $(0,0)$ oven i x-aksens positive del. Derefter placerer jeg det venstre ben således, at vinklen mellem benene er v :



Jeg tegner nu en retvinklet trekant i enhedscirklen, der har katetelængderne $\cos(v)$ og $\sin(v)$ samt hypotenuselængde 1.



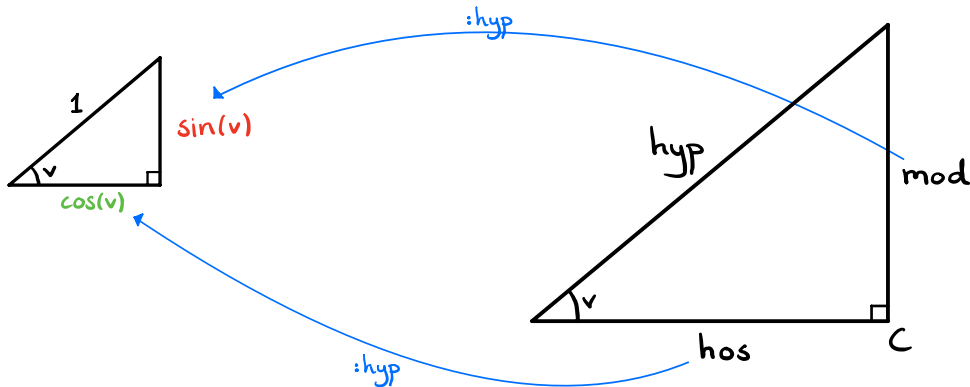
De 2 trekanter er ensvinklede, og jeg kan derfor finde en skalafaktor k .

Den store trekant har hypotenuselængde hyp , mens hypotenuselængden i den lille trekant er 1.

Derfor er skalafaktoren $k = \frac{\text{hyp}}{1} = \text{hyp}$.

Skalafaktoren er altså lig med længden af hypotenusen i den store trekant.

Jeg ved fra teorien om ensvinklede trekanter, at hvis jeg dividerer længden på en katete i den store trekant med skalafaktoren, får jeg længde på den ensliggende katete i den lille trekant:



Derfor gælder der: $\sin(v) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}}$ og $\cos(v) = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}}$.

For at komme frem til formlen for tangens, defineres tangens først på følgende måde:

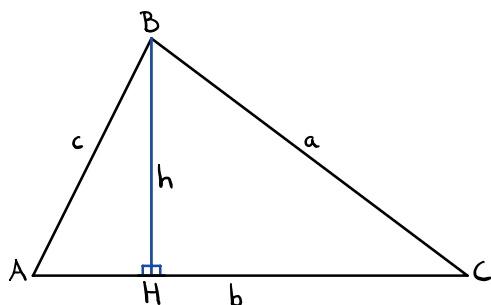
$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}.$$

Jeg indsætter nu de resultater, jeg lige er kommet frem til:

$$\tan(v) = \frac{\frac{\text{mod}}{\text{hyp}}}{\frac{\text{hos}}{\text{hyp}}} = \frac{\text{mod}}{\text{hos}}.$$

I en vilkårlig trekant ABC gælder sinusrelationerne $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$

Jeg tegner først en skitse af en vilkårlig trekant ABC , hvor jeg indtegner højden fra vinkel B :

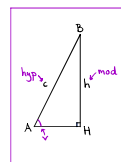


Højden h deler trekanten i 2 retvinklede trekanter.

Jeg vil komme frem til sinusrelationerne ved at finde 2 forskellige udtryk for h .

I trekanten ABH vil jeg benytte formlen $\sin(v) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}}$:

$$\sin(A) = \frac{h}{c}$$

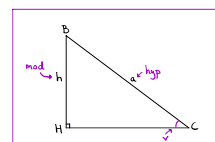


Jeg ganger med c på begge sider af lighedstegnet for at isolere h :

$$h = c \cdot \sin(A)$$

Jeg benytter igen formlen $\sin(v) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}}$ - nu i trekanten BCH :

$$\sin(C) = \frac{h}{a}$$



Jeg ganger med a på begge sider af lighedstegnet for at isolere h :

$$h = a \cdot \sin(C)$$

Jeg sætter nu de to udtryk for h lig med hinanden:

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C)$$

Jeg dividerer med $a \cdot c$ på begge sider af lighedstegnet og forkorter:

$$\frac{c \cdot \sin(A)}{a \cdot c} = \frac{a \cdot \sin(C)}{a \cdot c}$$

Dermed får jeg sinusrelationen $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(C)}{c}$.

Ved at bruge en af de andre højder i trekanten får jeg det sidste udtryk $\frac{\sin(B)}{b}$.

 [Gennemgang af bevis.](#)

I en vilkårlig trekant ABC kan arealet T bestemmes med den nye arealformel $T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)$

(Der er også to andre udgaver: $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B)$ og $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$)

Jeg ved, at den gamle arealformel er $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$, hvor h er højden og g er grundlinjen.

I beviset for sinusrelationerne kom jeg frem til, at hvis jeg vælger b som grundlinje, så kan højden skrives som $h = c \cdot \sin(A)$.

Derfor gælder der:

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sin(A) \cdot b = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A).$$

↑
Jeg bytter rundt på faktorerne rækkefølge.

På tilsvarende måde kan de øvrige udgaver af den nye arealformel findes ved at bruge $h = a \cdot \sin(C)$ i stedet i det ene tilfælde og vælge en anden side som grundlinje i det andet tilfælde.

 [YouTube Gennemgang af udledning.](#)

Renteformlen er $K = K_0 \cdot (1 + r)^n$,

hvor K_0 er startkapitalen, r er renten, n er antal terminer og K er kapitalen efter n terminer

Fra teorien om fremskrivningsfaktoren kender jeg formelen $S = B \cdot F$
 (Slutværdi = B , Begyndelsesværdi = F , Fremskrivningsfaktor = F)

Jeg vil sætte et beløb K_0 (kaldet startkapitalen) i en bank med rente r , og jeg ønsker at se, hvordan beløbet på kontoen udvikler sig hver termin.

Efter første termin vokser beløbet K_0 med en procentdel, og fremskrivningsfaktoren er $1 + r$.

Jeg ved nu fra min formel, at jeg skal gange startkapitalen med fremskrivningsfaktoren. Derfor er kapitalen K_1 efter første termin:

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + r)$$

Jeg behøver ikke skrive 1-tallet, men jeg gør det for at vise et mønster.

Efter endnu en termin vokser beløbet igen med samme procentdel, så fremskrivningsfaktoren er stadigvæk $1 + r$.

Kapitalen K_2 efter anden termin er derfor:

$$K_2 = K_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = K_0 \cdot (1 + r)^2$$

Efter endnu en termin vokser beløbet igen med samme procentdel, så fremskrivningsfaktoren er stadigvæk $1 + r$.

Kapitalen K_3 efter tredje termin er derfor:

$$K_3 = K_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = K_0 \cdot (1 + r)^3$$

Dette fortsætter: Efter hver termin bliver beløbet ganget med fremskrivningsfaktoren $1 + r$.

Kapitalen efter n terminer - kaldet K_n - er derfor:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

Dermed har jeg udledt renteformlen.

Isolering af K_0 , r og n i renteformlen $K = K_0 \cdot (1+r)^n$

K_0 isoleret

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\frac{K}{(1+r)^n} = \frac{K_0 \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n}$$

$$\frac{K}{(1+r)^n} = K_0$$

r isoleret

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\frac{K}{K_0} = \frac{K_0 \cdot (1+r)^n}{K_0}$$

$$\frac{K}{K_0} = (1+r)^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{K}{K_0}} = \sqrt[n]{(1+r)^n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{K}{K_0}} = 1+r$$

$$\sqrt[n]{\frac{K}{K_0}} - 1 = 1+r - 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{K}{K_0}} - 1 = r$$

n isoleret

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\frac{K}{K_0} = \frac{K_0 \cdot (1+r)^n}{K_0}$$

$$\frac{K}{K_0} = (1+r)^n$$

$$\log\left(\frac{K}{K_0}\right) = \log((1+r)^n)$$

$$\log\left(\frac{K}{K_0}\right) = n \cdot \log(1+r)$$

$$\frac{\log\left(\frac{K}{K_0}\right)}{\log(1+r)} = \frac{n \cdot \log(1+r)}{\log(1+r)}$$

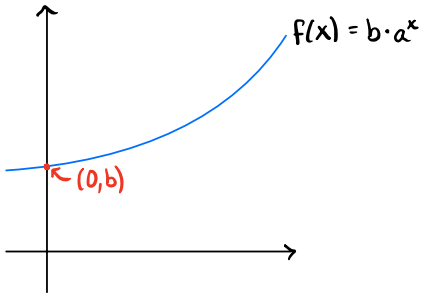
$$\frac{\log\left(\frac{K}{K_0}\right)}{\log(1+r)} = n$$

 [YouTube Gennemgang af isoleringer.](#)

EKSPONENTIELLE FUNKTIONER

I en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ angiver b grafens skæring med y -aksen
- altså går grafen gennem punktet $(0, b)$

Først tegner jeg grafen for en eksponentiel funktion i et koordinatsystem og markerer grafens skæring med y -aksen:



Jeg skal bevise, at b angiver grafens skæring med y -aksen - altså at grafen går gennem punktet $(0, b)$.

Derfor sætter jeg 0 ind på x 's plads og udregner $f(0)$:

$$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$$

↖ Når man opløfter et tal i 0 'te, giver det altid 1 .

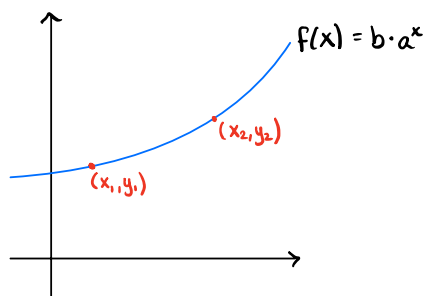
Så når x -værdien er 0 , er funktionsværdien b . Derfor går grafen gennem punktet $(0, b)$.

 [YouTube Gennemgang af bevis.](#)

Hvis vi kender 2 punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) på grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$, kan vi

$$\text{bestemme } a \text{ og } b \text{ med formlerne } a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \text{ og } b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Først tegner jeg grafen for en eksponentiel funktion i et koordinatsystem og indtegner de to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) :



Fori punkterne ligger på grafen, så gælder der, at hvis jeg indsætter x_1 på x 's plads i forskriften, så får jeg funktionsværdien y_1 , og hvis jeg indsætter x_2 på x 's plads i forskriften, så får jeg funktionsværdien y_2 . Der gælder altså:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \quad (\text{Ligning 1})$$

$$y_2 = b \cdot a^{x_2} \quad (\text{Ligning 2})$$

Her har jeg to ligninger med to ubekendte (nemlig a og b), men jeg ønsker at have én ligning med én ubekendt (nemlig a).

En smart måde at gøre det på er at dividere venstre side af ligning 2 med venstre side af ligning 1, og gør det samme på højre side:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$$

Bruger potensregne-reglen $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ (Formel 19 i formelsamlingen)

Forkorter med b .

Nu har jeg netop én ligning med én ubekendt:

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$$

Hvis jeg tager den $x_2 - x_1$ 'te rod på begge sider af lighedstegnet, isolerer jeg a :

$$\sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = a$$

Nu har jeg fundet formelen for a , og jeg finder formelen for b ved at isolere b i ligning 1 ($y_1 = b \cdot a^{x_1}$). Det gør jeg ved at dividere med a^{x_1} på begge sider af lighedstegnet:

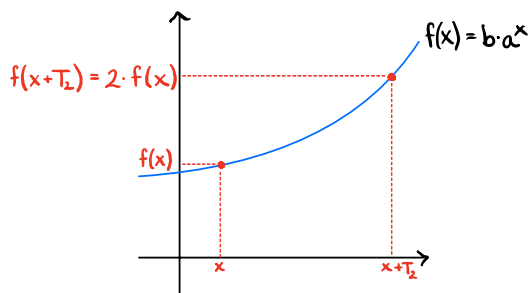
$$\frac{y_1}{a^{x_1}} = b$$

Jeg har nu fundet formlerne for a og b .

 [Gennemgang af bevis.](#)

Formlen for fordoblingskonstanten T_2 for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ er givet ved $T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$

Først tegner jeg grafen for en eksponentiel funktion i et koordinatsystem og markerer et punkt med en x -værdi og tilhørende funktionsværdi på grafen. Derefter markerer jeg et nyt punkt på grafen, hvor funktionsværdien er dobbelt så stor som den forrige. Dette nye punkt må have x -værdien $x + T_2$:



Da T_2 er fordoblingskonstanten, gælder der, at $f(x + T_2) = 2 \cdot f(x)$ for alle x 'er, da funktionsværdien bliver dobbelt så stor, når x vokser med T_2 :

$$f(x + T_2) = 2 \cdot f(x)$$

Indsætter i forskriften.

$$b \cdot a^{x+T_2} = 2 \cdot b \cdot a^x$$

Bruger potensregnereglen $a^{f+s} = a^f \cdot a^s$ (Formel 19 i formelsamlingen).

$$b \cdot a^x \cdot a^{T_2} = 2 \cdot b \cdot a^x$$

Dividerer med $b \cdot a^x$ på begge sider og forkorter.

$$\frac{\cancel{b} \cdot \cancel{a^x} \cdot a^{T_2}}{\cancel{b} \cdot \cancel{a^x}} = \frac{2 \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{a^x}}{\cancel{b} \cdot \cancel{a^x}}$$

$$a^{T_2} = 2$$

Jeg vil nu isolere T_2 :

Tager logaritmen på begge sider.

$$\log(a^{T_2}) = \log(2)$$

Bruger logaritmeregnereglen $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$.

$$T_2 \cdot \log(a) = \log(2)$$

Dividerer med $\log(a)$ på begge sider af lighedstegnet og forkorter.

$$\frac{\cancel{T_2} \cdot \log(a)}{\cancel{\log(a)}} = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Jeg har nu fundet formelen for T_2 .

 [Gennemgang af bevis.](#)

Antallet af muligheder for udvælgelse af r elementer blandt n elementer, når rækkefølgen ikke har betydning, kan udregnes med formlen $K(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

Jeg har en mængde med n elementer, og jeg vil vælge r ud af de n elementer til en ordnet mængde - rækkefølgen har altså betydning - med 2 forskellige metoder.

Den første metode er at vælge de r elementer direkte som permutationer. Det kan gøres på $P(n, r)$ forskellige måder.

Den anden metode er at udvælge en uordnet mængde med r elementer (hvor rækkefølgen altså ikke har nogen betydning) og sætte dem i orden bagefter.

Antallet af måder at udvælge en uordnet mængde med r elementer er $K(n, r)$.

For hver af disse måder er der $r!$ måder at sætte samtlige r elementer i rækkefølge. Ved brug af multiplikationsprincippet bliver det samlede antal måder $K(n, r) \cdot r!$.

Men antallet af måder er ens med de 2 metoder, så derfor er $K(n, r) \cdot r! = P(n, r)$.

Jeg vil nu isolere $K(n, r)$:

$$K(n, r) \cdot r! = P(n, r)$$

Dividerer med $r!$ på begge sider af lighedstegnet.

$$K(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$$

Omskriver $P(n, r)$.

$$K(n, r) = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}$$

Bruger brøkregele 12 i formelsamlingen.

$$K(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Jeg har nu fundet formlen for $K(n, r)$.

 [Gennemgang af bevis.](#)

SANDSYNLIGHEDSREGNING

Hvis vi har et udfaldsrum med n udfald i et symmetrisk sandsynlighedsfelt, vil sandsynligheden for hvert udfald være $\frac{1}{n}$

Hvis jeg har et symmetrisk sandsynlighedsfelt og et udfaldsrum med n udfald, vil sandsynligheden p for hvert udfald være lige stor.

Summen af alle sandsynligheder er 1, så sandsynligheden p kan findes på følgende måde:

$$\underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ gange}} = 1$$

n gange har jeg p , hvilket giver $n \cdot p$.

$$n \cdot p = 1$$

p isoleres ved at dividere med n på begge sider af lighedstegnet.

$$p = \frac{1}{n}$$

Jeg har nu fundet sandsynligheden p for hvert udfald.

 [YouTube Gennemgang af bevis.](#)

Hvis vi har et symmetrisk sandsynlighedsfelt, så vil sandsynligheden for en hændelse H , der består af k af i alt n udfald, udregnes med formlen $P(H) = \frac{k}{n}$

Hvis jeg har et symmetrisk sandsynlighedsfelt og et udfaldsrum med n udfald, har jeg lige vist, at sandsynligheden for hvert udfald er $\frac{1}{n}$.

Da hændelsen H består af k udfald, er sandsynligheden $P(H)$:

$$P(H) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{k \text{ gange}} = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

k gange har jeg $\frac{1}{n}$, hvilket giver $k \cdot \frac{1}{n}$.
 k ganges med tælleren i brøken.

Altså er sandsynligheden $P(H) = \frac{k}{n}$. Dette kaldes også $P(H) = \frac{\text{Antal gunstige udfald}}{\text{Antal mulige udfald}}$.

 [YouTube Gennemgang af bevis.](#)