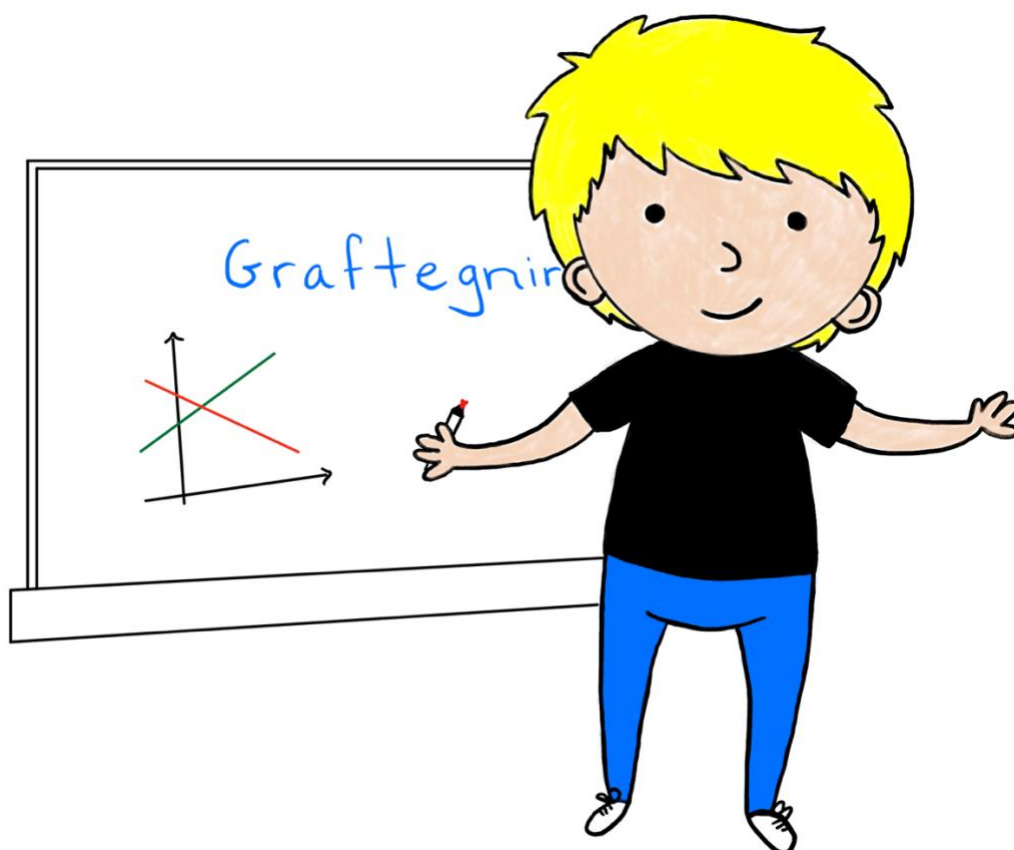


SCHACKS NOTER

KAPITEL 9 - GRAFTEGNING OG FUNKTIONSUNDERSØGELSE



Udarbejdet af Kristian Schack Blom, Århus Akademi

Fejlrettelser samt ris og ros bedes sendes til aaks@aarhusakademi.dk

Den nyeste version af noterne kan altid findes på www.matematikC.dk

Indholdsfortegnelse

ANDRE TYPER FUNKTIONER	2
TEGNING AF GRAF I GEOGEBRA	4
GRAFISK BESTEMMELSE AF X- OG Y-VÆRDIER	6
GRAFS SKÆRINGER MED X-AKSEN	8
GRAFERS SKÆRINGER MED HINANDEN	11
STØRSTE ELLER MINDSTE FUNKTIONSVÆRDI	14

ANDRE TYPER FUNKTIONER

Vi har kigget på lineære funktioner og eksponentielle funktioner, men til den skriftlige eksamen kan vi også blive præsenteret for en funktion, vi aldrig før har set. I nogle situationer (som opgave #9.1 neden for) skal vi blot indsætte et oplyst tal på den korrekte plads og bestemme den ubekendte - enten ved en beregning eller ved at løse en ligning. I andre situationer skal vi tegne grafen for den nye funktion i Geogebra og derefter udnytte værktøjerne i Geogebra til at undersøge funktionen på den ene eller anden måde.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #9.1 (DELPRØVE 2)

I en model bliver brudstyrken for en jernkæde beskrevet ved funktionen

$$f(x) = 34,5 \cdot x^{2,10} ,$$

hvor x er tykkelsen af jernkæden målt i mm, og $f(x)$ er brudstyrken målt i kg.

- a) Bestem brudstyrken for en 6 mm tyk jernkæde.
- b) Hvor tyk skal jernkæden være, hvis brudstyrken skal være 2500 kg?

a)

Jeg skal bestemme brudstyrken for en 6 mm tyk jernkæde, så jeg indsætter 6 på x 's plads i modellen og bestemmer $f(6)$:

$$f(6) = 34,5 \cdot 6^{2,1} \approx 1485,719$$

Altså er brudstyrken for en 6 mm tyk jernkæde 1486,7 kg.

b)

Jeg skal bestemme tykkelsen af jernkæden, hvis brudstyrken skal være 2500 kg, så jeg indsætter derfor 2500 på $f(x)$'s plads og isolerer x :

$$2500 = 34,5 \cdot x^{2,10}$$



Ligningen løses for x vha. WordMat.

$$x = 7,687265$$

Altså skal jernkæden have en tykkelse på 7,7 mm, hvis brudstyrken skal være 2500 kg.

 [Kort gennemgang af opgaven.](#)

Peter har købt en Macbook Pro og afdrager på restgælden, så den bliver mindre hvert år.

Størrelsen af Peters restgæld kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 26500 - 10000 \cdot 1,09^x ,$$

hvor $f(x)$ er Peters restgæld i kroner efter x år.

- Bestem Peters restgæld efter 3 år.
- Løs ligningen $f(x) = 0$, og forklar, hvad ligningen og dens løsning fortæller om Peters restgæld.

a)

Da x angiver antal år, indsætter jeg 3 på x 's plads i funktionen $f(x) = 26500 - 10000 \cdot 1,09^x$ og bestemmer Peters restgæld efter 3 år:

$$f(3) = 26500 - 10000 \cdot 1,09^3 \approx 13549,71$$

Altså er Peters restgæld efter 3 år på 13549,71 kroner.

b)

Jeg løser nu $f(x) = 0$:

$$26500 - 10000 \cdot 1,09^x = 0$$



Ligningen løses for x vha. WordMat.

$$x = 11,30872$$

Ligningen og dens løsning fortæller, at Peters restgæld er på 0 kroner (han er med andre ord gældsfri) efter 11,3 år.

 [Kort gennemgang af opgaven.](#)

TEGNING AF GRAF I GEOGEBRA

I Geogebra skal vi være opmærksom på, at vi skal bruge **punktum i stedet for komma**, når vi skriver en funktion ind i input-feltet. Eksempelvis skal funktionen $f(x) = 3 \cdot 1,2^x$ skrives således $f(x) = 3 \cdot 1.2^x$.

Komma



Punktum



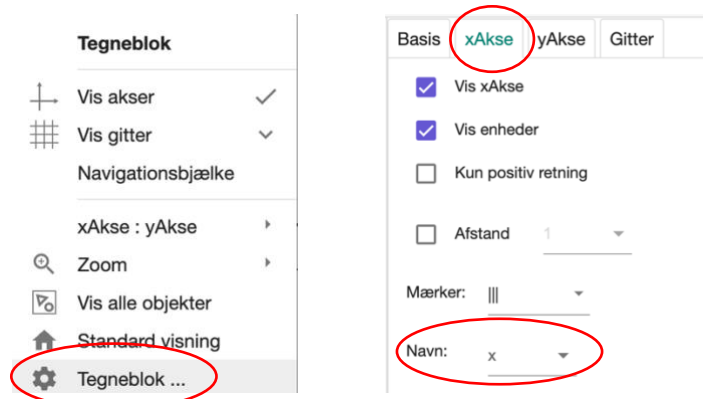
Det er vigtigt at kunne tegne graferne i et passende vindue i Geogebra, så vi kan se det væsentlige af grafen. Programmet har et "Formindsk/Forstør"-værktøj, men det er nemmere at trykke på "Flyt tegnefladen"-ikonet (vist nedenfor) og derefter trække i akserne.



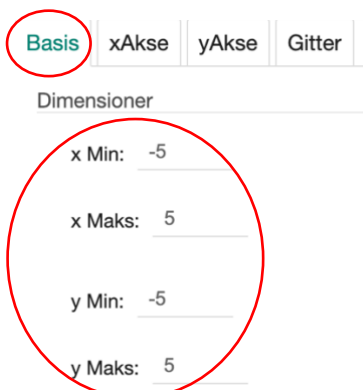
For at vise forskriften for funktionen, kan vi trykke på "Flyt"-ikonet (vist nedenfor) og derefter trække forskriften fra input-feltet ind i tegneblokken.



Hvis vi ønsker at navngive akserne, kan vi højreklikke et sted i vores koordinatsystem, vælge "Tegneblok" (vist nedenfor), trykke på fanen "xAkse" og navngiv akse under "Navn". Vi kan gøre tilsvarende for y-aksen ved at vælge fanen "yAkse".



Under fanen "Basis" kan vi i øvrigt lave en præcis indstilling af grafvinduet, hvis vi ønsker det.



GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #9.3 (DELPRØVE 2)

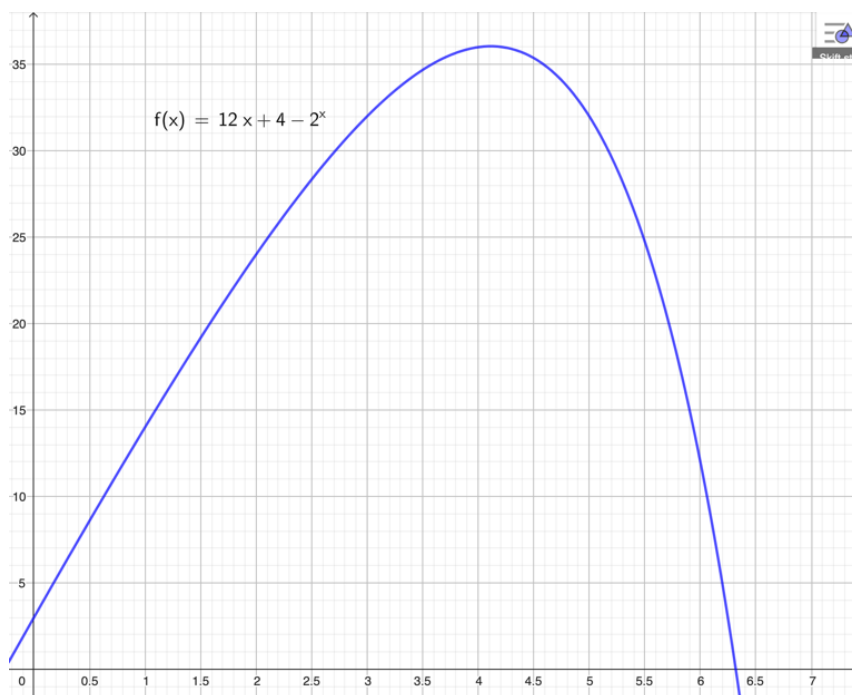
En funktion f har forskriften

$$f(x) = 12x + 4 - 2^x.$$

a) Tegn grafen for f . Man skal kunne se grafen fra $x = 0$ til $x = 6$.

a)

Jeg tegner grafen for f ved hjælp af Geogebra og tilpasser vinduet, så man kan se grafen fra $x = 0$ til $x = 6$.



 **YouTube** [Kort gennemgang af opgaven.](#)

GRAFISK BESTEMMELSE AF X- OG Y-VÆRDIER

Når vi har tegnet en graf, kan vi bruge denne til grafisk at bestemme x - og y -værdier.

Hvis vi skal bestemme, hvornår en funktion har en bestemt y -værdi k (hvor k er et tal), så tegner vi en vandret linje med ligningen $y = k$ og finder skæringspunkterne mellem denne linje og grafen ved at bruge "Skæringsværktøj" (se ikon nedenfor). Vi kan derefter aflæse skæringspunktets x -koordinater.



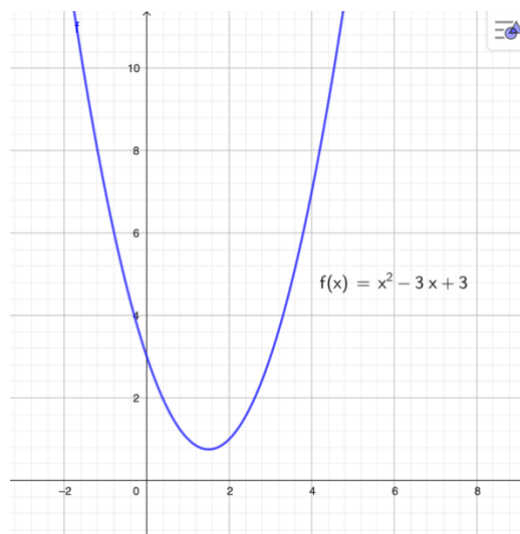
Hvis vi modsat skal bestemme en y -værdi, når vi får oplyst x -værdien k , så tegner vi en lodret linje med ligningen $x = k$ og finder skæringspunktet mellem denne linje og grafen ved igen at bruge "Skæringsværktøj". Vi kan derefter aflæse skæringspunktets y -koordinat.

Hvis vi gerne vil kunne se koordinatsættene til skæringspunkterne i vores koordinatsystem (og ikke bare i inputfeltet), kan vi højreklikke på punkterne, vælge "Indstillinger" og derefter vælge "Navn og værdi".

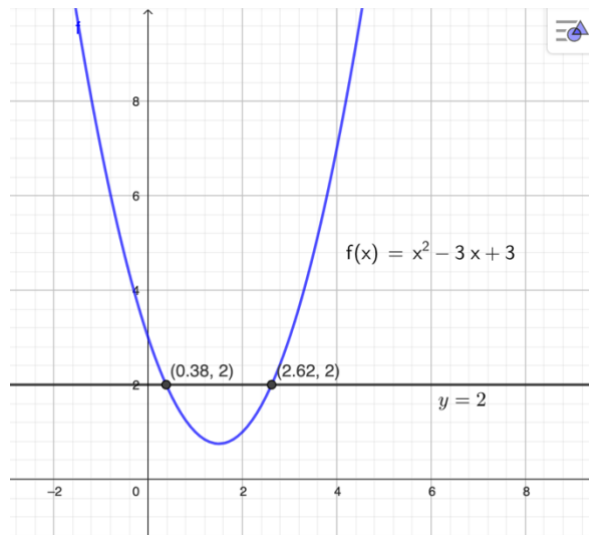
Polære koordinater	☒ vis objekt	
vis objekt ✓	☐ Vis spor	
AA vis navn ✓	☒ vis navn: Navn & værdi	
Vis spor	☐ Fast objekt	
Omdøb	☐ Hjælpe objekt	
Slet	☐ Vis tilpassede skæringslinjer	
Indstillinger		

EKSEMPEL

Vi tegner først grafen for funktionen $f(x) = x^2 - 3x + 2$:

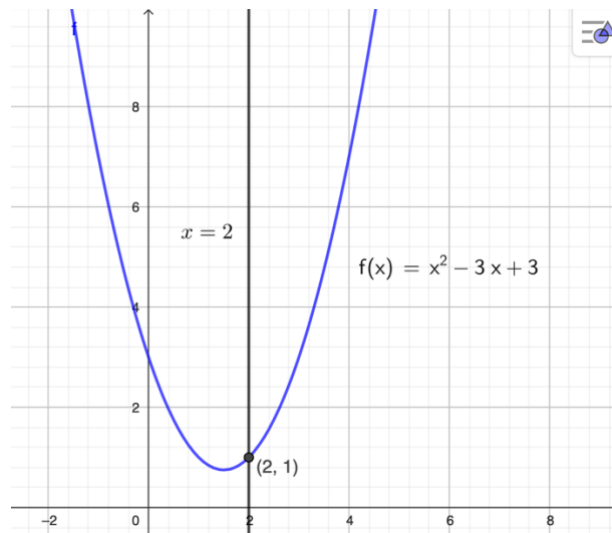


Hvis vi ønsker at bestemme, hvornår y -værdien er 2, tegner vi linjen med ligningen $y = 2$, bestemmer skæringspunkterne med "Skæringsværktøj" og aflæse x -værdierne:



Altså er x -værdierne **0,38** og **2,62**.

Hvis vi ønsker at bestemme, hvad y -værdien er, når x er **2**, tegner vi linjen med ligningen $x = 2$ og bestemmer skæringspunktets y -værdi:



Altså er y -værdien **1**.

 **YouTube** [Kort gennemgang af grafisk bestemmelse samt eksemplet.](#)

GRAFS SKÆRINGER MED X-AKSEN

Når vi har tegnet grafen for en funktion, kan vi blive bedt om at bestemme grafens skæringspunkter med førsteaksen. Her *kan* vi bruge "Rødder"-værktøjet, men det er ikke altid, at vi så får oplyst alle skæringspunkterne. I stedet kan vi bruge "Skæringsværktøj" (se ikon nedenfor), hvor vi først skal trykke på grafen og derefter x -aksen for at bestemme skæringspunkterne. Hvis Geogebra ikke giver alle skæringspunkterne første gang, kan vi benytte værktøjet igen og denne gang trykke på grafen i nærheden af det skæringspunkt, der ikke blev markeret første gang.



Se hvordan vi bestemmer skæringer med x -aksen i gennemgangen af de næste to eksamenslignende opgaver.

 **YouTube** [Kort gennemgang af grafs skæringer med x-aksen.](#)

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #9.4 (DELPRØVE 2)

En funktion f er givet ved

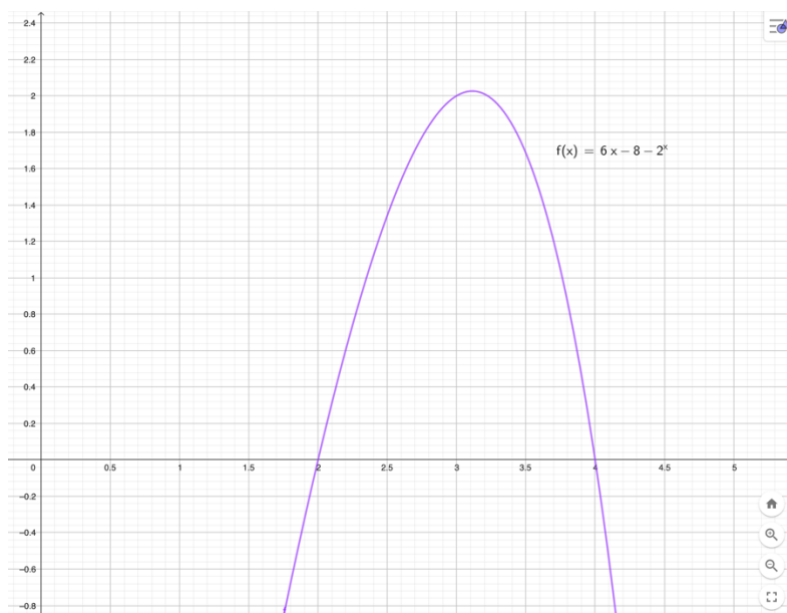
$$f(x) = 6x - 8 - 2^x.$$

a) Tegn grafen for f .

b) Bestem koordinatsættet til hvert af grafens skæringspunkter med førsteaksen.

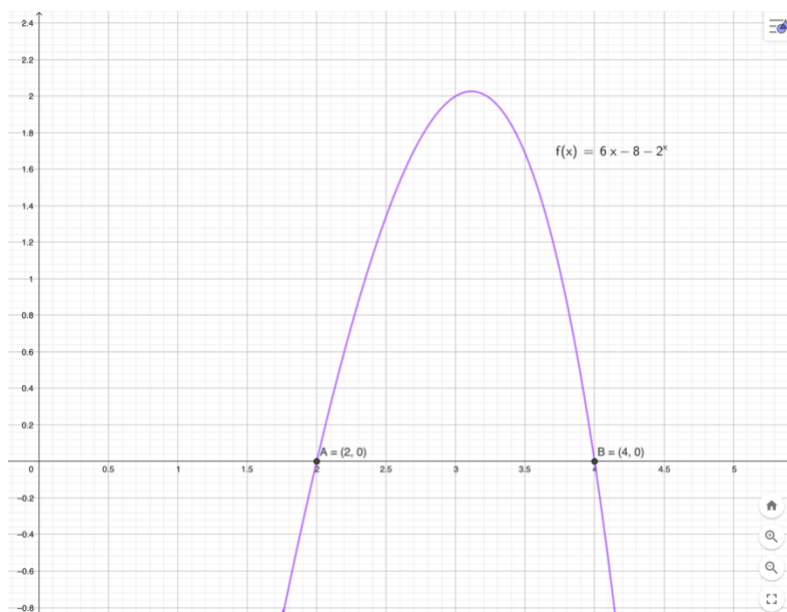
a)

Jeg tegner grafen for f ved hjælp af Geogebra:



b)

Jeg bestemmer koordinatsættet til hvert af grafens skæringspunkter med førsteaksen med skæringsværktøjet i Geogebra:



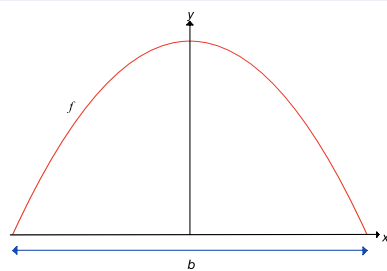
Altså er skæringspunkterne $(2, 0)$ og $(4, 0)$

 [Kort gennemgang af opgaven.](#)

[Til toppen](#)



Figur 1



Figur 2

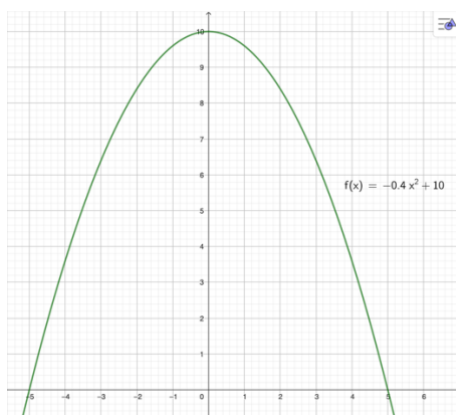
Figur 1 viser et pop-up-mål til fodbold. I en model afgrænses målrammen af x -aksen og grafen for funktionen

$$f(x) = -0,4x^2 + 10$$

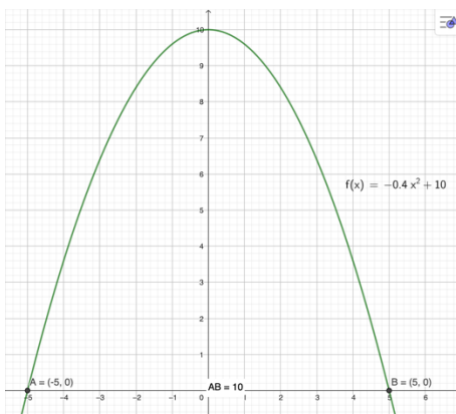
Alle enheder i modellen er cm.

- Tegn grafen for f .
- Brug modellen til at bestemme målets bredde b (se figur 2).

a)
Jeg tegner grafen for f ved hjælp af Geogebra:



b)
Jeg skal bestemme målets bredde, så jeg bestemmer koordinatsættet til hvert af grafens skæringspunkter med førsteaksen med skæringsværktøjet:



Skæringspunkterne er $(-5, 0)$ og $(5, 0)$, så afstanden mellem punkterne er 10. Altså er målets bredde 10 cm.

GRAFERS SKÆRINGER MED HINANDEN

I visse opgaver får vi oplyst to funktioner f og g og bliver - efter at have tegnet graferne i samme koordinatsystem - bedt om at bestemme koordinatsættet til grafernes skæringspunkter. Endnu en gang kan vi benytte "Skæringsværktøj" (se ikon nedenfor) og derefter trykke på begge grafer. Hvis Geogebra ikke giver alle skæringspunkter første gang, kan vi benytte værktøjet igen og denne gang trykke på graferne i nærheden af det skæringspunkt, der ikke blev markeret første gang.



Alternativt kan vi blive bedt om at løse ligningen $f(x) = g(x)$. Det kan vi gøre ved hjælp af WordMat ved at sætte de to ligninger lig med hinanden, men vi kan også løse ligningen grafisk ved at aflæse x -værdierne til skæringspunkterne mellem de to grafer.

 **YouTube** [Kort gennemgang af grafers skæringer med hinanden.](#)

Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = -5x + 8 \text{ og } g(x) = 2 + x^4$$

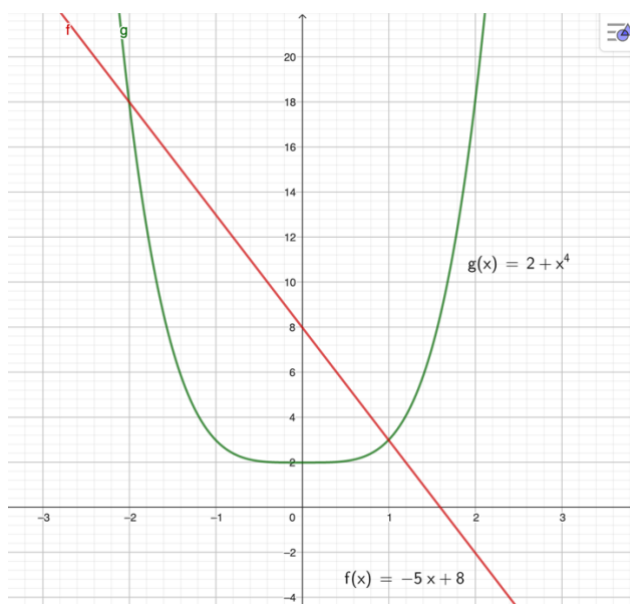
a) Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem.

Graferne har netop to skæringspunkter.

b) Bestem koordinatsættet til hvert af de to skæringspunkter.

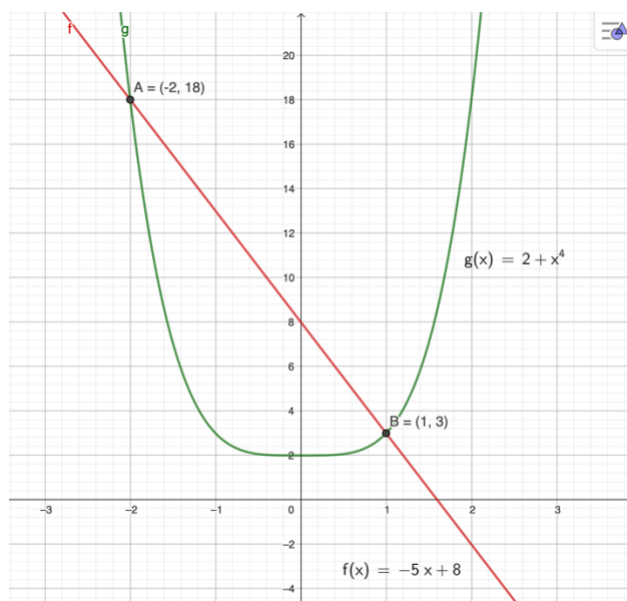
a)

Jeg tegner først graferne for f og g i samme koordinatsystem ved hjælp af Geogebra:



b)

Jeg bestemmer nu koordinatsættet til hvert af de to skæringspunkter ved hjælp af skæringsværktøjet:



Altså er skæringspunkterne $(-2, 18)$ og $(1, 3)$.

 [Kort gennemgang af opgaven.](#)

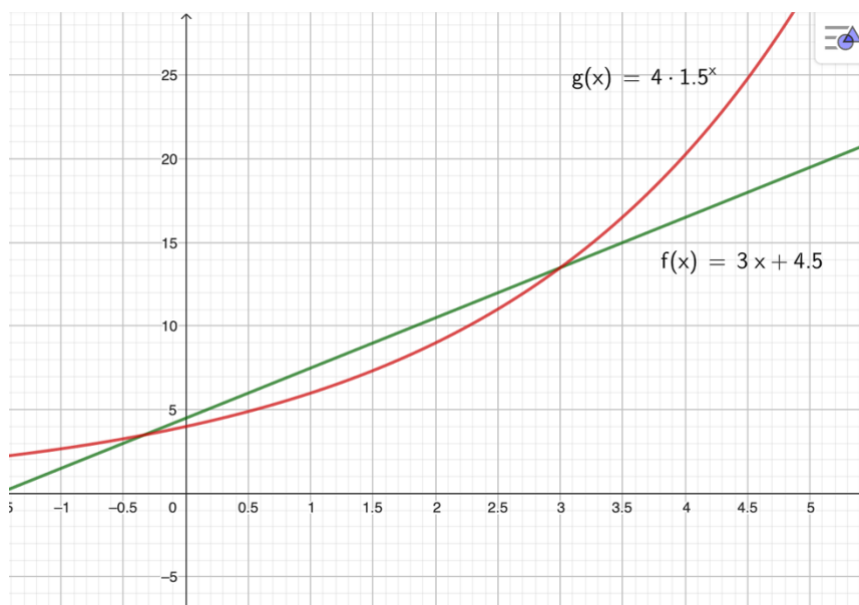
Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = 3x + 4,5 \text{ og } g(x) = 4 \cdot 1,5^x.$$

- Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem.
- Løs ligningen $f(x) = g(x)$.

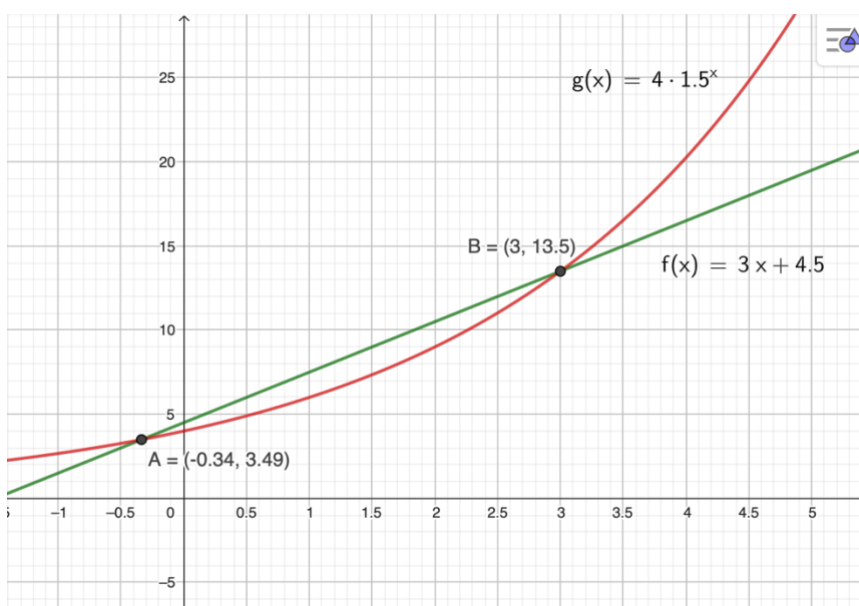
a)

Jeg tegner først graferne for f og g i samme koordinatsystem ved hjælp af Geogebra:



b)

Jeg løser nu ligningen $f(x) = g(x)$ grafisk ved at bestemme x -koordinaterne til de to skæringspunkter:



Altså er løsningerne $x = -0,34$ og $x = 3$.

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)

STØRSTE ELLER MINDSTE FUNKTIONSVÆRDI

Vi kan benytte Geogebra til at bestemme en funktions største eller mindste funktionsværdi ved hjælp af "Ekstremum"-værktøjet (se ikon nedenfor). Når vi har trykket på ikonet, skal vi derefter trykke på grafen for vores funktion.

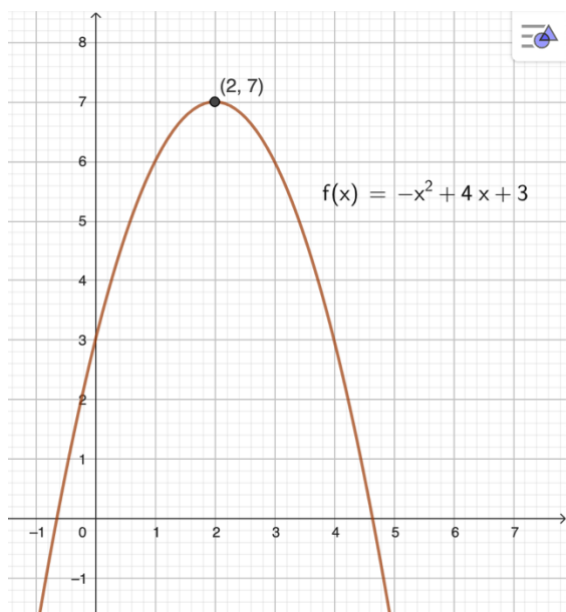


Nogle gange kan værktøjet ikke bestemme den største eller mindste funktionsværdi, hvis funktionen er defineret i et begrænset interval. I stedet kan vi i inputfeltet bruge kommandoen $\text{Ekstremum}(\text{funktion}, \text{Start x-Værdi}, \text{Slut x-Værdi})$, hvor "funktion" erstattes med navnet på funktionen (typisk f) og Start x-Værdi og Slut x-Værdi erstattes med det begrænsede intervals endepunkter. Eksempelvis vil kommandoen $\text{Ekstremum}(f, 0, 10)$ finde de største og mindste funktionsværdier for funktionen f i intervallet fra 0 til 10.

Der har dog ikke været denne type opgave til den skriftlige eksamen de seneste fire år.

EKSEMPEL

Vi tegner grafen for funktionen $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ og bestemmer den største funktionsværdi ved hjælp af "Ekstremum"-værktøjet:



Altså er den største funktionsværdi 7.

[Kort gennemgang af eksemplet.](#)