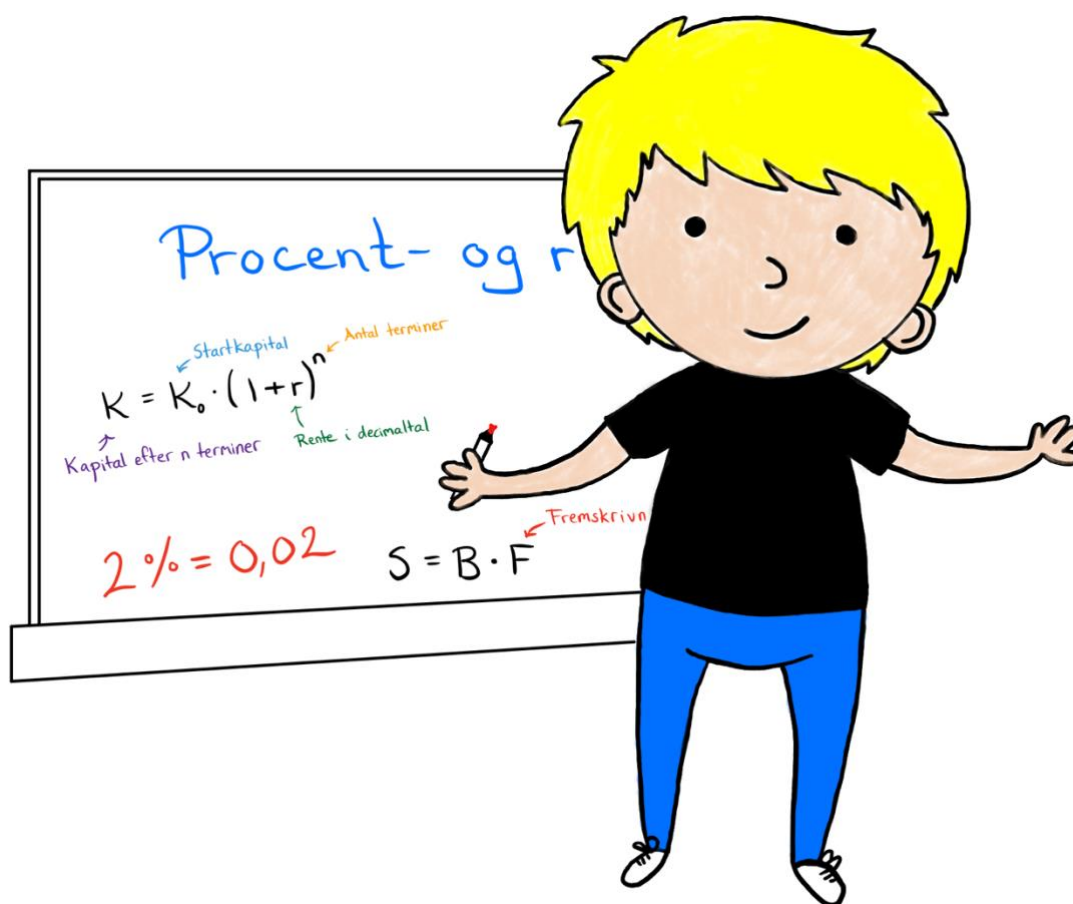


SCHACKS NOTER

KAPITEL 3 - PROCENT- OG RENTESREGNING



Udarbejdet af Kristian Schack Blom, Århus Akademi

Fejlrettelser samt ris og ros bedes sendes til aaks@aarhusakademi.dk

Den nyeste version af noterne kan altid findes på www.matematikC.dk

Indholdsfortegnelse

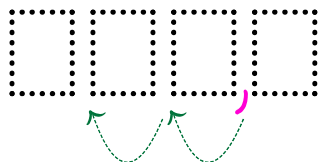
PROCENTER	2
FREMSKRIVNINGSAKTOR	3
AT LÆGGE PROCENTER TIL OG TRÆKKE PROCENTER FRA	4
AT BESTEMME EN PROCENTÆNDRING UD FRA EN FREMSKRIVNINGSAKTOR	5
FRA 1 TERMIN TIL N TERMINER	6
RENTEFORMLEN	7
ANNUITETSOPSPARING (SUPPLERENDE STOF)	11
ANNUITETSLÅN (SUPPLERENDE STOF)	13

PROCENTER

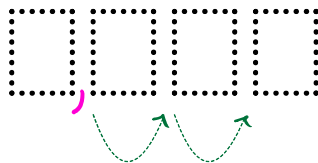
Procent betyder *per hundrede* (promille betyder *per tusinde*). Et par eksempler ser ud som følgende:

$$\begin{aligned}1\% &= \frac{1}{100} = 0,01 \\27\% &= \frac{27}{100} = 0,27 \\146\% &= \frac{146}{100} = 1,46 \\2,5\% &= \frac{25}{100} = 0,025\end{aligned}$$

Som ovenstående eksempler viser, så gælder der følgende: Når vi skal omregne **fra procenttal til decimaltal**, skal vi **flytte kommaet to pladser til venstre**:



Når vi skal omregne **fra decimaltal til procenttal**, skal vi **flytte kommaet to pladser til højre**.



$$\begin{aligned}0,04 &= 4\% \\0,25 &= 25\% \\1,68 &= 168\%\end{aligned}$$

 [YouTube Kort video om procenter.](#)

FREMSKRIVNINGSAKTOR

Fremskrivningsfaktoren F er givet ved formlen $F = 1 + r$, hvor r står for procentændringen i decimaltal (r bliver også kaldt for *vækstrate*):

$$F = 1 + r$$

Procentændring i decimaltal

Fremskrivningsfaktor

Læg mærke til, at vi **altid** skal lægge 1 til, når vi går fra **procentændring** til **fremskrivningsfaktor** - også selvom procentændringen er negativ.

Omvendt skal vi **altid** trække 1 fra, når vi går fra **fremskrivningsfaktor** til **procentændring**:

$$F = 1 + r$$
$$r = F - 1$$

Procentændring (i decimaltal)

Fremskrivningsfaktor

Altså kan procentændringen r findes med formlen $r = F - 1$:

$$r = F - 1$$

Procentændring i decimaltal

Fremskrivningsfaktor

Hvis fremskrivningsfaktoren er **større end 1**, er procentændringen **positiv**.

Hvis fremskrivningsfaktoren er **mindre end 1**, er procentændringen **negativ**.

EKSEMPLER

- Hvis fremskrivningsfaktoren er 1,04, er procentændringen 4%, da $r = 1,04 - 1 = 0,04 = 4\%$.
- Hvis fremskrivningsfaktoren er 1,005, er procentændringen 0,5%, da $r = 1,005 - 1 = 0,005 = 0,5\%$.
- Hvis fremskrivningsfaktoren er 1,36, er procentændringen 36%, da $r = 1,36 - 1 = 0,36 = 36\%$.
- Hvis fremskrivningsfaktoren er 0,98, er procentændringen -2%, da $r = 0,98 - 1 = -0,02 = -2\%$.
- Hvis fremskrivningsfaktoren er 0,455, er procentændringen -54,5%, da $r = 0,455 - 1 = -0,545 = -54,5\%$.

 [Kort video om fremskrivningsfaktoren samt eksemplerne.](#)

AT LÆGGE PROCENTER TIL OG TRÆKKE PROCENTER FRA

Vi kan bruge fremskrivningsfaktoren til at lægge procenter til en størrelse eller trække procenter fra en størrelse ved hjælp af formelen $S = B \cdot F$.

S er slutværdi.

B er begyndelsesværdi.

F er fremskrivningsfaktoren.

$$S = B \cdot F$$

Diagram illustrating the formula $S = B \cdot F$ with handwritten annotations:

- S is labeled "Slutværdi" (End value) with a blue arrow pointing to it.
- B is labeled "Begyndelsesværdi" (Initial value) with an orange arrow pointing to it.
- F is labeled "Fremskrivningsfaktor" (Growth factor) with a red arrow pointing to it.

EKSEMPEL

Et par bukser koster 900 kroner, men prisen bliver derefter sat op med 5 procent.

Den gamle pris på 900 kroner er B .

For at finde den nye pris S , omskriver vi først procentændringen r til decimaltal: $r = 5\% = 0,05$.

Derefter findes fremskrivningsfaktoren: $F = 1 + 0,05 = 1,05$.

Vi kan nu udregne den nye pris: $S = 900 \cdot 1,05 = 945$.

Prisen for bukserne er altså nu 945 kroner.

EKSEMPEL

En iskiosk giver 25 procent rabat på en is, der normalt koster 40 kroner.

Den gamle pris på 40 kroner er B .

For at finde den nye pris S , omskriver vi først procentændringen r til decimaltal: $r = -25\% = -0,25$.

Derefter findes fremskrivningsfaktoren: $F = 1 - 0,25 = 0,75$.

Den nye pris er $S = 40 \cdot 0,75 = 30$.

Altså koster isen nu 30 kroner.

 [Kort gennemgang af formelen samt eksemplerne.](#)

AT BESTEMME EN PROCENTÆNDRING UD FRA EN FREMSKRIVNINGSAKTOR

Formlen fra forrige side kan omskrives og dermed bruges til at bestemme fremskrivningsfaktoren og dermed også procentændringen (med formelen $r = F - 1$). Hvis vi kender begyndelsesværdien B og slutværdien S , kan fremskrivningsfaktoren F findes ved formelen $F = \frac{S}{B}$

$$F = \frac{S}{B}$$

Handwritten annotations: "Fremskrivningsfaktor" with an arrow pointing to F , "Slutværdi" with an arrow pointing to S , and "Begyndelsesværdi" with an arrow pointing to B .

EKSEMPEL

Da Playstation 4 udkom, satte internetbutikken Coolshop prisen op fra 5200 kroner til 6499 kroner, og vi vil gerne finde ud af, hvor stor procentændringen var.

Vi bruger $F = \frac{S}{B}$ hvor B er 5200 og S er 6499, og vi indsætter tallene:

$$F = \frac{6499}{5200} = 1,2498$$

Derefter bruger vi formelen $r = F - 1$ for at bestemme procentændringen:

$$r = 1,2498 - 1 = 0,2498 = 24,98\%$$

Altså blev prisen sat op med hele 24,98%.

EKSEMPEL

Senere blev Playstation 4 sat ned til normalprisen igen (altså fra 6499 kroner til 5200 kroner), og vi vil gerne finde ud af, hvor stor procentændringen nu var:

Vi bruger $F = \frac{S}{B}$ hvor B er 6499 og S er 5200, og vi indsætter tallene:

$$F = \frac{5200}{6499} \approx 0,8001$$

Derefter bruger vi formelen $r = F - 1$ for at bestemme procentændringen:

$$r = 0,8001 - 1 = -0,1999 = -19,99\%$$

Altså blev prisen sat ned med 19,99%.

 [Kort gennemgang af formelen samt eksemplerne.](#)

FRA 1 TERMIN TIL N TERMINER

Hvis vi kender procentændringen for 1 termin, kan vi finde procentændringen for n terminer. Hvis r er procentændringen for 1 termin, kan procentændringen for n terminer - kaldet R - bestemmes med følgende formel:

Procentændring for 1 termin i decimaltal

$$R = (1 + r)^n - 1$$

Procentændring for n terminer i decimaltal

Antal terminer

EKSEMPEL

Et leasingfirma tilbyder en månedlig rente på 1,3%, og vi vil gerne vide, hvad den årlige rente er.

Da der jo er 12 måneder på et år, ved vi, at $n = 12$. Da den månedlige rente er $r = 1,3\% = 0,013$, kan vi indsætte tallene i formelen $R = (1 + r)^n - 1$ og bestemme R :

$$R = (1 + 0,013)^{12} - 1 \approx 0,1677 = 16,77\%$$

Altså er den årlige rente på 16,77%.

 [Kort gennemgang af formelen samt eksemplet.](#)

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #3.1 (DELPRØVE 2)

En bank tilbyder en konto med en fast månedlig rente på 0,7%.

a) Bestem den tilsvarende årlige procentvise rente.

a)

Jeg benytter formelen $R = (1 + r)^n - 1$, og jeg ved, at $r = 0,7\% = 0,007$ og $n = 12$.

Jeg indsætter tallene og bestemmer R :

$$R = (1 + 0,007)^{12} - 1 \approx 0,08731066$$

Altså er den årlige procentvise rente ca. 8,7%

 [Kort gennemgang af opgaven.](#)

RENTEFORMLEN

Renteformlen (kaldet kapitalformlen i formelsamlingen) ser således ud: $K = K_0 \cdot (1 + r)^n$

K er kapital efter n terminer.

K_0 er startkapital.

r er renten (procentændringen) i decimaltal.

n er antal terminer.

$$K = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

Diagram illustrating the formula components with handwritten labels:

- K : Kapital efter n terminer (purple arrow)
- K_0 : Startkapital (blue arrow)
- r : Rente i decimaltal (green arrow)
- n : Antal terminer (orange arrow)

Formlen indeholder 4 størrelser. **For at kunne bestemme en størrelse, skal vi derfor altid kende de 3 andre størrelser, så de fremgår *altid* af opgaveteksten.** For eksempel ser teksten fra en tidligere eksamensopgave således ud:

James indsætter 18000 kr. på en konto til en fast årlig rente på 1,2 %.

a) Hvor stort et beløb står der på kontoen efter 7 år?

Ud fra denne tekst skal vi kunne bestemme K , så ud fra teksten skal vi kunne aflæse størrelserne K_0 , r og n , og det kan vi heldigvis også:

James indsætter 18000 kr. på en konto til en fast årlig rente på 1,2 %.

a) Hvor stort et beløb står der på kontoen efter 7 år? (skal laves om til decimaltal)

 [Kort video om renteformlen.](#)

Peter indsætter 20000 kr. på en konto til en fast årlig rente på 1,5%.

a) Hvor stor et beløb står der på kontoen efter 5 år?

Ahmed investerer 20000 kr. i aktier. Efter 5 år er værdien af hans investering steget til 28000 kr.

b) Bestem den årlige procentvise vækst af hans investering.

a)

Jeg benytter renteformlen $K = K_0 \cdot (1 + r)^n$, og jeg har fået oplyst, at $K_0 = 20000$, $n = 5$ og $r = 1,5\% = 0,015$. Jeg indsætter tallene og bestemmer K :

$$K = 20000 \cdot (1 + 0,015)^5 \approx 21545,68$$

Dermed står der 21545,68 kroner på kontoen efter 5 år.

b)

Jeg benytter igen renteformlen. Denne gang ved jeg, at $K_0 = 20000$, $K = 28000$ og $n = 5$. Jeg indsætter tallene og isolerer r :

$$\begin{aligned} 28000 &= 20000 \cdot (1 + r)^5 \\ \Updownarrow & \quad \text{Ligningen løses for } r \text{ vha. WordMat.} \\ r &= 0,06961038 \end{aligned}$$

Dermed har den årlige procentvise vækst af hans investering været ca. 7%.

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #3.3 (DELPRØVE 2)

Jonas indsætter et beløb på en bankkonto med en fast årlig rente på 2,5%.
Efter 7 år står der 23773,72 kr. på kontoen.

a) Hvilket beløb indsatte Jonas på kontoen?

a)

Jeg benytter renteformlen $K = K_0 \cdot (1 + r)^n$, og jeg har fået oplyst, at $K = 23773,72$, $n = 7$ og $r = 2,5\% = 0,025$.
Jeg indsætter tallene og isolerer K_0 :

$$\Downarrow \quad \begin{aligned} 23773,72 &= K_0 \cdot (1 + 0,025)^7 \\ \text{Ligningen løses for } K_0 \text{ vha. WordMat.} \\ K_0 &= 20000 \end{aligned}$$

Dermed satte Jonas 20000 kroner ind på kontoen.

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #3.4 (DELPRØVE 2)

Der indsættes 10000 kr. på en bankkonto med negativ rente.

Efter n år er beløbet K på denne konto givet ved

$$K = 10000 \cdot 0,985^n.$$

- a) Hvor mange år går der, før beløbet på kontoen kommer under 8000 kr.?
b) Gør rede for, at renten på kontoen er $-1,5\%$ pr. år.

a)

Jeg benytter renteformlen $K = K_0 \cdot (1 + r)^n$, og jeg har fået oplyst, at $K = 8000$, $K_0 = 10000$ og $1 + r = 0,985$. Jeg indsætter tallene og isolerer n :

$$\Downarrow \quad \begin{aligned} 8000 &= 10000 \cdot 0,985^n \\ \text{Ligningen løses for } n \text{ vha. WordMat.} \\ n &= 14,76438 \end{aligned}$$

Altså går der 15 år, før beløbet på kontoen kommer under 8000 kr.

b)

Jeg ved allerede, at $1 + r = 0,985$, hvor r er vores rente. Jeg isolerer nu r i ligningen:

$$\Downarrow \quad \begin{aligned} 1 + r &= 0,985 \\ \text{Ligningen løses for } r \text{ vha. WordMat.} \\ r &= -0,015 \end{aligned}$$

Da $r = -0,015 = -1,5\%$, er renten på kontoen $-1,5\%$ pr. år.

 [YouTube Kort gennemgang af opgaven.](#)

Anne indsætter 20000 kr. på en konto med en rente på 3 % pr. år.

Samme dag indsætter Emil 13600 kr. på en konto med en rente på 5,5 % pr. år.

- a) Hvor mange år går der, før Anne og Emil har lige mange penge på deres bankkonti?
Forklar din metode.

a)

Jeg vil benytte renteformlen $K = K_0 \cdot (1 + r)^n$ til at beskrive udviklingen på begge konti.

Da Annes startkapital $K_0 = 20000$, og renten $r = 3\% = 0,03$, kan udviklingen beskrives således:

$$K = 20000 \cdot (1 + 0,03)^n$$

Da Emils startkapital $K_0 = 13600$, og renten $r = 5,5\% = 0,055$, kan udviklingen beskrives således:

$$K = 13600 \cdot (1 + 0,055)^n$$

For at bestemme, hvor mange år, der går, før Anne og Emil har lige mange penge på deres bankkonti, sætter jeg de to udtryk lig med hinanden:

$$20000 \cdot 1,03^n = 13600 \cdot 1,055^n$$



Ligningen løses for n vha. WordMat.

$$n = 16,08135$$

Altså går der 16 år, før Anne og Emil har lige mange penge på deres bankkonti.

 [Kort gennemgang af opgaven.](#)

ANNUITETSOPSPARING (SUPPLERENDE STOF)

Annuitetsopsparingsformlen ser således ud: $A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

A_n er saldoen efter n indbetalinger (f.eks. er A_3 saldoen efter 3 indbetalinger).

Saldoen bliver opgjort lige når den sidste indbetaling er foretaget. Sidste indbetaling når altså ikke at tilskrives renter.

b er det beløb, der indbetales hver termin.

r er renten (procentændringen) i decimaltal pr. termin.

n er antal indbetalinger.

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Handwritten annotations for the formula above:

- A_n : Saldo efter n indbetalinger
- b : Beløb der indbetales
- n : Antal indbetalinger
- r : Rente i decimaltal

Formlen kan bruges ved en opsparing, hvor der indbetales det samme beløb på kontoen hver termin.

 [Kort video om annuitetsopsparingsformlen.](#)

EKSEMPEL

En person sætter hver måned 300 kroner i banken til 1,5 % i månedlig rente. Saldoen udvikler sig således:

Indbetaling (b)		Rentefoden (r)	
Udfyld:		300	0,015
Antal indbetalinger (n)	Rentebeløbet (r_n)	Saldo før indbetaling	Saldo efter indbetaling (A_n)
1			300
2	5	305	605
3	9	614	914
4	14	927	1227
5	18	1246	1546
6	23	1569	1869
7	28	1897	2197
8	33	2230	2530
9	38	2568	2868
10	43	2911	3211
11	48	3259	3559
12	53	3612	3912
13	59	3971	4271
14	64	4335	4635
15	70	4705	5005

For at bestemme saldoen efter 6 måneder, hvilket svarer til 7 indbetalinger, kan vi bruge regnearket (men det kræver jo, at man har fundet saldoen for alle de foregående indbetalinger). Vi kan også indsætte i formlen:

$$A_7 = 300 \cdot \frac{(1 + 0,015)^7 - 1}{0,015} = 2196,9$$

Efter et halvt år står der altså 2197 kroner på opsparingskontoen.

 [Kort gennemgang af eksemplet.](#)

[Til toppen](#)

EKSEMPEL

Vi vil gerne beregne hvor meget, vi skal indbetale hver måned, hvis vi efter 30 månedlige indbetalinger gerne vil have sparet 45000 kroner op. I banken kan vi få 0,4 % pr. måned.

$$45000 = b \cdot \frac{(1 + 0,004)^{30} - 1}{0,004}$$



Ligningen løses for b vha. WordMat.

$$b = 1414,794$$

Altså skal vi indbetale 1414,8 kroner hver gang.

[Kort gennemgang af eksemplet.](#)

EKSEMPEL

Vi har lavet 8 månedlige indbetalinger på 500 kroner, og der står nu 4393,66 kroner på din opsparing. Vi vil nu bestemme den månedlige rente:

$$4393,66 = 500 \cdot \frac{(1 + r)^8 - 1}{r}$$



Ligningen løses for r vha. CAS-værktøjet WordMatMac.

$$r = 0,02664981$$

Altså er den månedlige rente på 2,66%.

[Kort gennemgang af eksemplet.](#)

EKSEMPEL

Der står 5658 kr. på vores konto, renten er på 4% pr. måned, og vi indbetaler 190 kr. pr. måned. Vi vil gerne bestemme hvor mange indbetalinger, vi har lavet:

$$5658 = 190 \cdot \frac{(1 + 0,04)^n - 1}{0,04}$$



Ligningen løses for n vha. WordMat.

$$n = 20,0004$$

Altså har vi lavet 20 indbetalinger.

[Kort gennemgang af eksemplet.](#)

ANNUITETSLÅN (SUPPLERENDE STOF)

Annuitetslånsformlen ser således ud: $G = y \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$

G er hovedstolen - altså det beløb, der lånes.

y er terminsydelsen - altså det beløb, der skal betales hver termin.

r er renten (procentændringen) i decimaltal pr. termin.

n er antal terminer.

$$G = y \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

Hovedstolen G , Terminsydelsen y , Rente i decimaltal r , Antal terminer n

Formlen kan bruges ved et lån, hvor låntageren betaler den samme ydelse hver termin.

 [YouTube Kort video om annuitetslånsformlen.](#)

EKSEMPEL

Asger vil gerne låne penge til en rejse, og han har regnet ud, at han efter rejsen kan undvære 2500 kroner i sit budget hver måned. Ligeledes vil han gerne være gældfri om 3 år. Renten på lånet er 2% om måneden.

$$G = 2500 \cdot \frac{1 - (1 + 0,02)^{-36}}{0,02} = 63722,11$$

Altså kan Asger låne ca. 63722 kroner til sin rejse.

 [YouTube Kort gennemgang af eksemplet.](#)

EKSEMPEL

Vi vil bestemme den månedlige ydelse for et annuitetslån på 50000 kroner, hvor renten er 5% pr. måned og løbetiden er 15 måneder:

$$50000 = y \cdot \frac{1 - (1 + 0,05)^{-15}}{0,05}$$



Ligningen løses for y vha. WordMat.

$$y = 4817,114$$

Ydelsen hver måned er altså på 4817,1 kroner. I alt er der 15 terminer, så den samlede ydelse kan findes således:

$$y_{\text{samlet}} = y \cdot 15 = 4817,1 \cdot 15 = 72256,5$$

Så alt i alt skal der tilbagebetales 72256,5 kroner for lånet på 50000 kroner.

 [YouTube Kort gennemgang af eksemplet.](#)

EKSEMPEL

Palle har købt en vikingehjelm til 3000 kroner på afbetaling. Hver måned skal han betale 299 kroner, og den månedlige rente er 4 %. Han vil gerne vide, hvornår han er gældfri.

$$3000 = 299 \cdot \frac{1 - (1 + 0,04)^{-n}}{0,04}$$



Ligningen løses for n vha. WordMat.

$$n = 13,0813$$

Altså er Palle gældfri om 13 måneder.

 [YouTube Kort gennemgang af eksemplet.](#)

EKSEMPEL

Martin har taget et lån på 5000 kroner, og det koster ham 500 kroner om måneden. Løbetiden er 12 måneder. Den månedlige rente kan bestemmes således:

$$5000 = 500 \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-12}}{r}$$



Ligningen løses for r vha. WordMat. med følgende antagelser/definitioner: $r > 0$

$$r = 0,02922854$$

Altså er den månedlige rente 2,9%.

 [YouTube Kort gennemgang af eksemplet.](#)