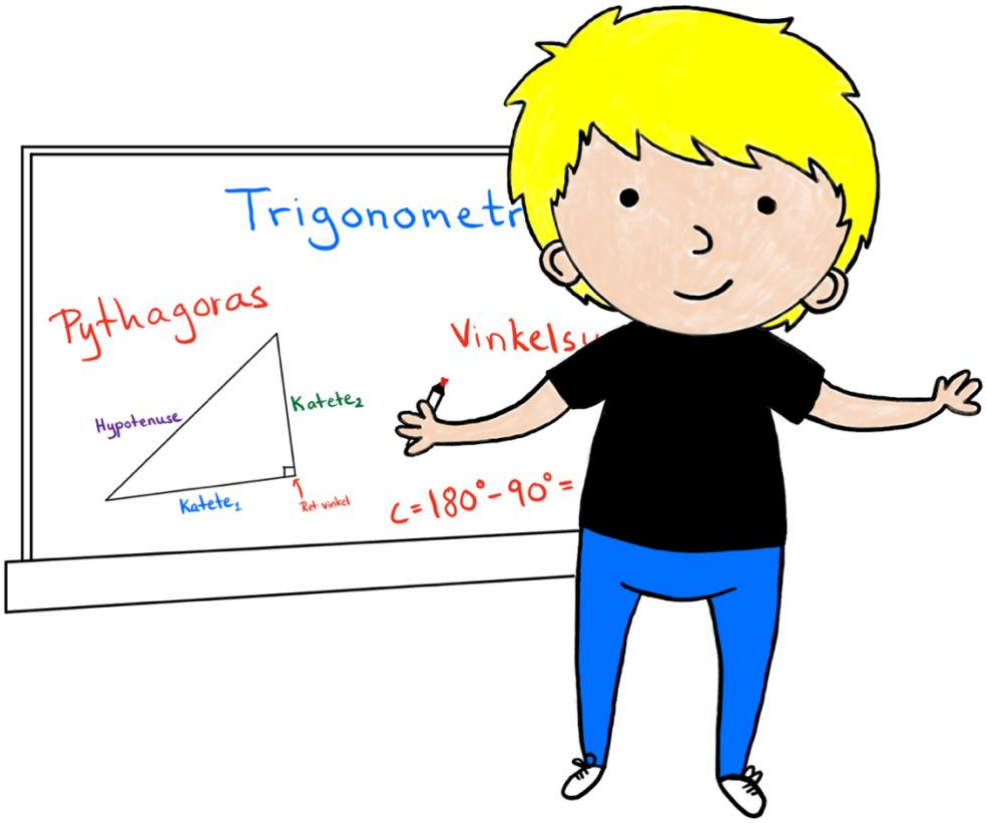
SCHACKS NOTER
KAPITEL 2 - TRIGONOMETRI



Udarbejdet af Kristian Schack Blom, Århus Akademi

Fejlrettelser samt ris og ros bedes sendes til aaks@aarhusakademi.dk

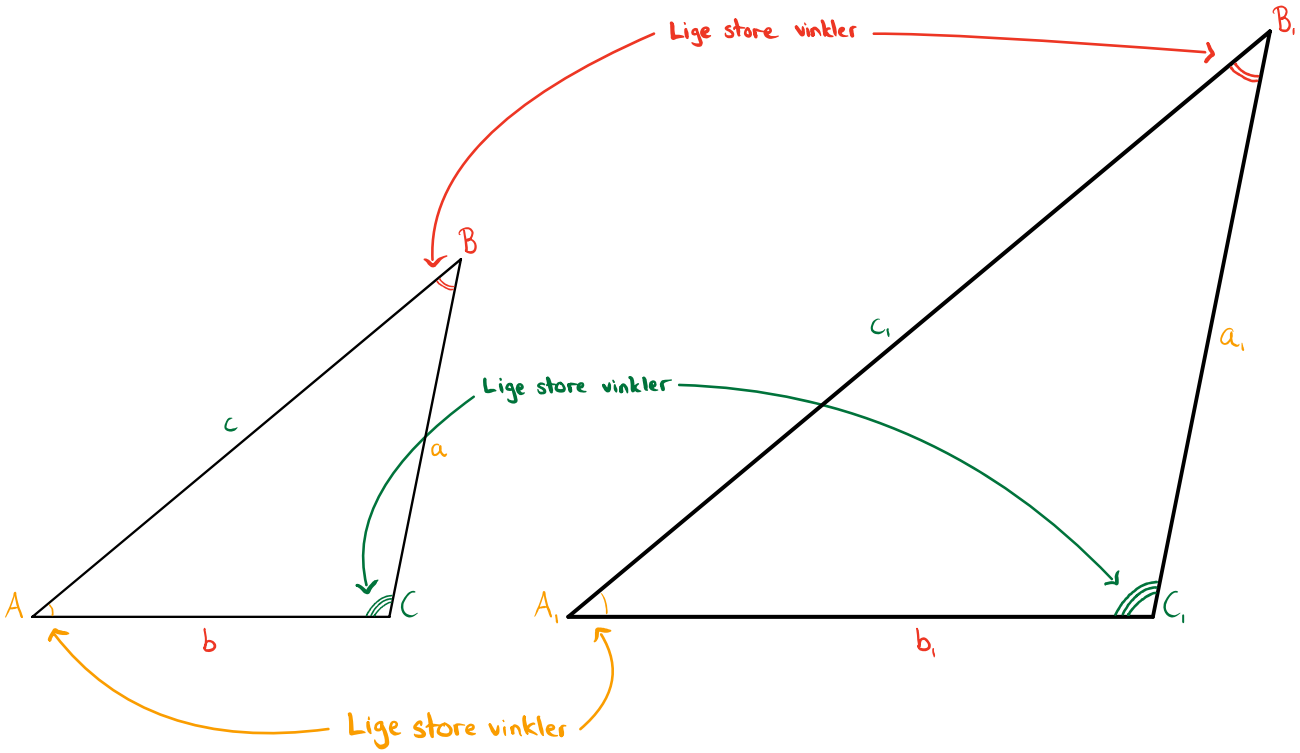
Den nyeste version af noterne kan altid findes på www.matematikC.dk

Indholdsfortegnelse

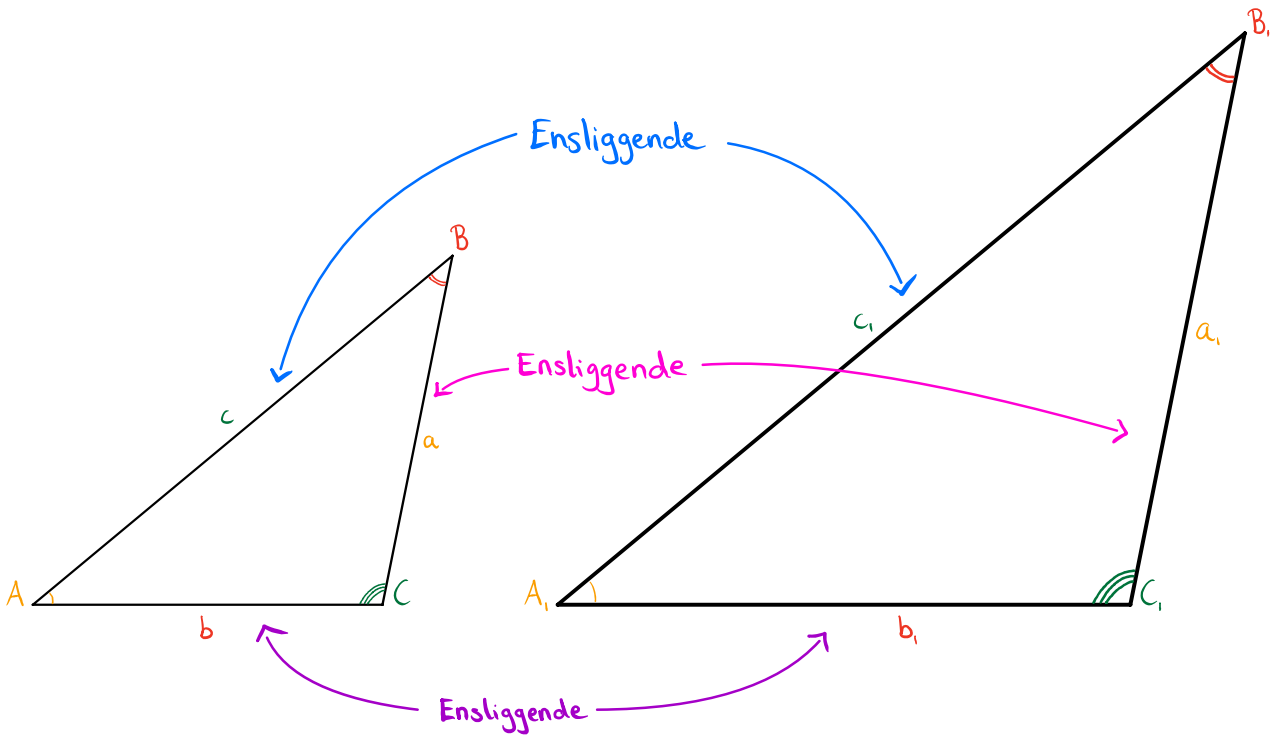
ENSVINKLEDE TREKANTER **2**
PYTHAGORAS SÆTNING **5**
SINUS, COSINUS OG TANGENS **8**
ENHEDSCIRKLEN **11**
SINUSRELATIONERNE (SUPPLERENDE STOF) **21**
DEN NYE AREALFORMEL (SUPPLERENDE STOF) **23**
MEDIAN OG VINKELHALVERINGSLINJE **24**
DE FEM TREKANTSTILFÆLDE **27**
KONSTRUKTION AF TREKANTSTILFÆLDE 1 **28**
KONSTRUKTION AF TREKANTSTILFÆLDE 2 **31**
KONSTRUKTION AF TREKANTSTILFÆLDE 3 **34**
KONSTRUKTION AF TREKANTSTILFÆLDE 4 **37**
KONSTRUKTION AF TREKANTSTILFÆLDE 5 **40**
FIRKANTER **43**

ENSVINKLEDE TREKANTER

To trekanter er ensvinklede, hvis deres vinkler er parvis ens, hvormed den ene trekant er en større eller mindre kopi af den anden.



Sider, der ligger over for ens vinkler, kaldes ensliggende:



Når to trekanter er ensvinklede, er forholdet mellem siderne lig med en skalafaktor k. **Skalafaktoren findes ved at dividere en side i den store trekant med den ensliggende side i den lille trekant:**

$$k = \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

Skalafaktoren

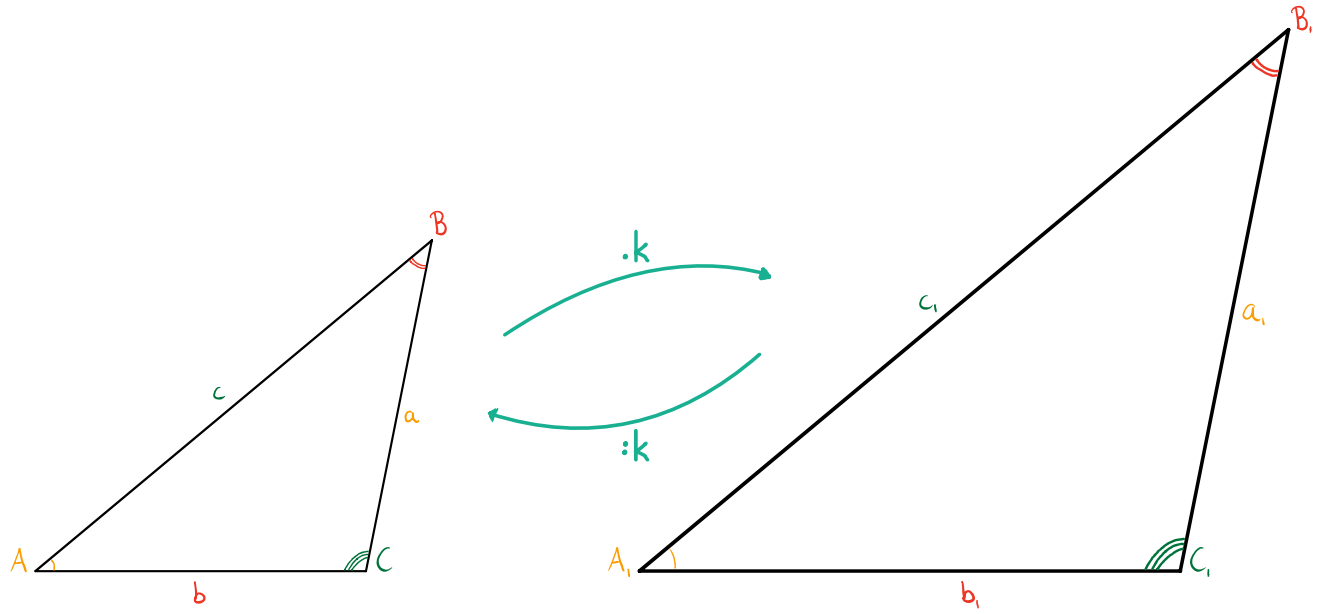
- Hvis vi ønsker at bestemme en sidelængde i den store trekant, skal vi gange længden af den ensliggende side i den lille trekant med skalafaktoren:

$$a_1 = k \cdot a \qquad b_1 = k \cdot b \qquad c_1 = k \cdot c$$

- Hvis vi ønsker at bestemme en sidelængde i den lille trekant, skal vi dividere længden af den ensliggende side i den store trekant med skalafaktoren:

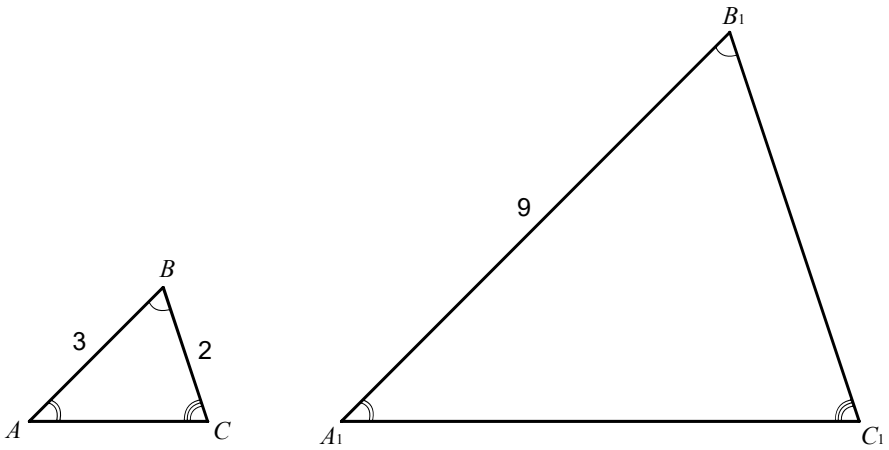
$$a = \frac{a_1}{k} \qquad b = \frac{b_1}{k} \qquad c = \frac{c_1}{k}$$

Det kan også illustreres således:



YouTube Kort video om ensvinklede trekanter.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.1 (DELPRØVE 1)



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og $A_1B_1C_1$. Nogle af malene er angivet pa figuren.

a) Bestem længden af siden B_1C_1.

a) Da de 2 trekanter er ensvinklede, kan jeg bestemme skalafaktoren med formlen $k = \frac{|A_1B_1|}{|AB|}$.

Jeg indsætter tallene $k = \frac{9}{3} = 3$.

Jeg kan nu bestemme længden af B_1C_1 med formlen $|B_1C_1| = k \cdot |BC|$:

$|B_1C_1| = 3 \cdot 2 = 6$

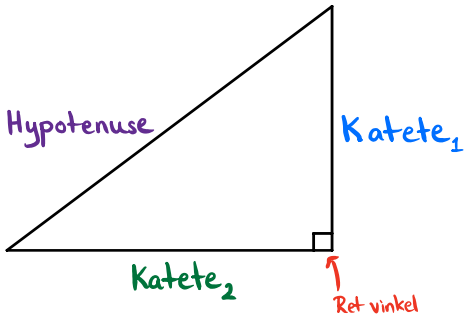
Dermed er længden af siden B_1C_1 lig med 6.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

PYTHAGORAS SÆTNING

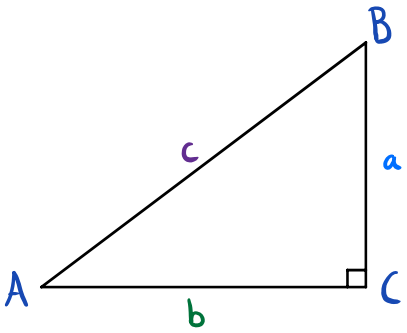
I en retvinklet trekant gælder Pythagoras' Sætning:

$$Katete_1^2 + Katete_2^2 = Hypotenuse^2$$



Hvis vi snakker om trekant *ABC*, hvor *C* er ret, lyder Pythagoras' Sætning måske mere velkendt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Hvis vi kender to af siderne i en retvinklet trekant, kan vi bestemme den sidste side vha. Pythagoras' Sætning ved at indsætte tallene i formlen og isolere den ubekendte.

EKSEMPEL

I trekant *ABC* er *C* ret, $a = 3$ og $b = 4$. Vi vil bestemme hypotenusen c vha. Pythagoras' Sætning:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Vi indsætter tallene og isolerer c:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= c^2 \\ \sqrt{3^2 + 4^2} &= c \\ 5 &= c \end{aligned}$$

EKSEMPEL

I trekant ABC er C ret, $a = 6{,}5$ og $c = 9{,}6$. Vi vil bestemme kateten b vha. Pythagoras' Sætning:

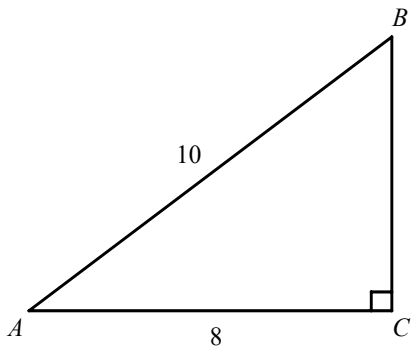
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Vi indsætter tallene og isolerer b:

$$\begin{aligned} 6{,}5^2 + b^2 &= 9{,}6^2 \\ b^2 &= 9{,}6^2 - 6{,}5^2 \\ b &= \sqrt{9{,}6^2 - 6{,}5^2} \\ b &= 7{,}06 \end{aligned}$$

YouTube Kort video om Pythagoras Sætning samt eksemplerne.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.2 (DELPRØVE 1)



Figuren viser en retvinklet trekant ABC. Nogle af trekantens mal er angivet pa figuren.

a) Bestem længden af siden BC.

a) Da trekanten er retvinklet, kan jeg bestemme længden af kateten BC ved hjælp af Pythagoras Sætning $|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$.

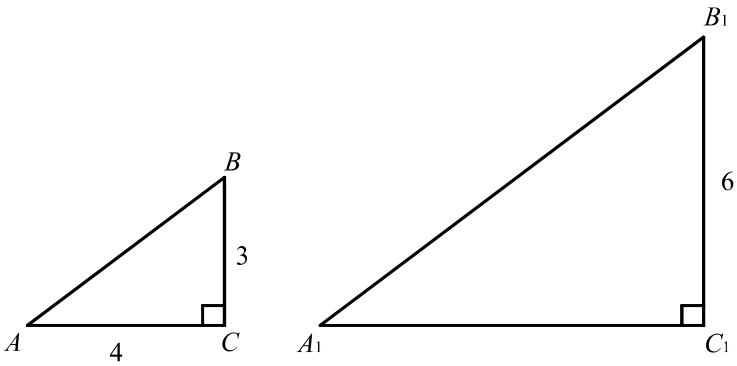
Jeg sætter tallene ind og isolerer $|BC|$:

$$\begin{aligned} 8^2+|BC|^2 &= 10^2 \\ |BC|^2 &= 10^2-8^2 \\ |BC|^2 &= 100-64 \\ |BC|^2 &= 36 \\ |BC| &= \sqrt{36} \\ |BC| &= 6 \end{aligned}$$

Altså er længden af BC 6.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.3 (DELPRØVE 1)



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og $A_1B_1C_1$.

Nogle af trekanternes mal fremgar af figuren.

a) Bestem længden af siden A_1C_1.

De to trekanter er begge retvinklede.

b) Bestem længden af siden A_1B_1.

a) Da de 2 trekanter ABC og $A_1B_1C_1$ er ensvinklede, kan jeg først bestemme skalafaktor k ved følgende formel $k = \frac{|B_1C_1|}{|BC|}$

Jeg indsætter tallene $k = \frac{6}{3} = 2$.

Jeg kan nu bestemme længden af A_1C_1 med formlen $|A_1C_1| = k \cdot |AC|$:

$|A_1C_1| = 2 \cdot 4 = 8$

Dermed er længden af siden A_1C_1 lig med 8.

b) Da trekanten $A_1B_1C_1$ er retvinklet, kan jeg bestemme længden af hypotenusen A_1B_1 ved hjælp af Pythagoras Sætning $|A_1C_1|^2 + |B_1C_1|^2 = |A_1B_1|^2$.

Jeg sætter tallene ind og isolerer $|A_1B_1|$:

$$8^2 + 6^2 = |A_1B_1|^2$$
$$64 + 36 = |A_1B_1|^2$$
$$100 = |A_1B_1|^2$$
$$\sqrt{100} = |A_1B_1|$$
$$10 = |A_1B_1|$$

Altså er længden af A_1B_1 10.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

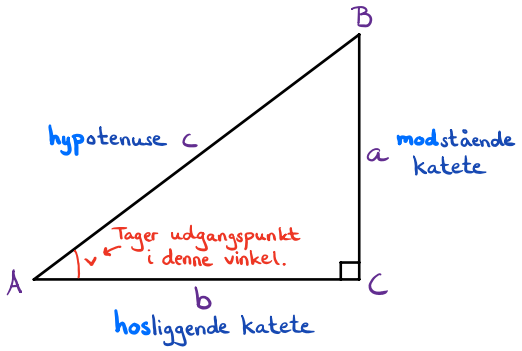
SINUS, COSINUS OG TANGENS

Når vi skal arbejde med formlerne for sinus, cosinus og tangens, skal vi kunne skelne mellem den retvinklede trekants to kateter. Vi skelner mellem dem ved at navngive dem i forhold til den spidse vinkel, vi tager udgangspunkt i, og vi tager udgangspunkt i den spidse vinkel, vi enten skal bestemme eller har fået oplyst i opgaven.

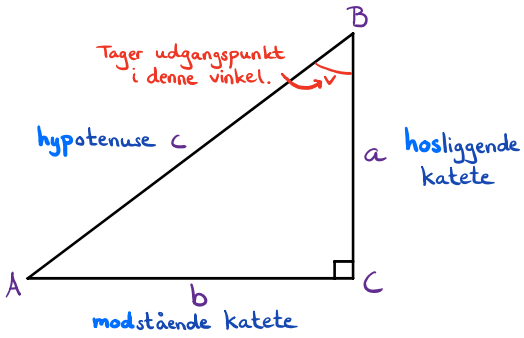
Den **hos**liggende katete er den katete, der rører den vinkel, vi tager udgangspunkt i.

Den **mod**stående katete står over for den vinkel, vi tager udgangspunkt i.

På nedenstående figur tager vi udgangspunkt i **vinkel *A***. Derfor er siden *b* den hosliggende katete og siden *a* den modstående katete.



På nedenstående figur tager vi udgangspunkt i **vinkel *B***. Derfor er siden *a* den hosliggende katete og siden *b* den modstående katete.



Formlerne for sinus, cosinus og tangens ser således ud:

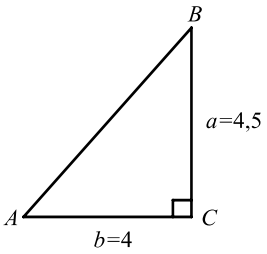
$$\sin(v) = \frac{mod}{hyp} \qquad \cos(v) = \frac{hos}{hyp} \qquad \tan(v) = \frac{mod}{hos}$$

Hver formel indeholder tre størrelser: to sider og én vinkel. **Hvis vi kender to af størrelserne, kan vi bestemme den tredje ved at sætte tallene ind i formlen og isolere den ubekendte.** Vi kan således både bruge formlerne til at bestemme sidelængder og vinkler.

YouTube Kort gennemgang af sinus, cosinus og tangens.

EKSEMPEL

I den retvinklede trekant ABC får vi oplyst, at $\boldsymbol{a = 4,5}$, $\boldsymbol{b = 4}$, og vi skal bestemme vinkel $\boldsymbol{A}$.



Vi tager udgangspunkt i vinkel $\boldsymbol{A}$, da det er den vinkel, vi skal bestemme.

Derfor er siden $\boldsymbol{b}$ den hosliggende katete og siden $\boldsymbol{a}$ den modstående katete, og vi skal derfor bruge formlen $\tan(v) = \frac{mod}{hos}$, der i dette tilfælde hedder $\tan(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.

Vi indsætter vores tal og isolerer vinkel $\boldsymbol{A}$:

$$\tan(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{4,5}}{\boldsymbol{4}}$$

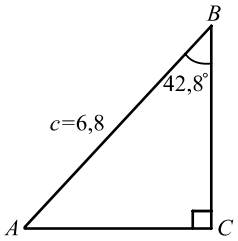
$\Updownarrow$ *Ligningen løses for A vha. WordMat.*

$$\boldsymbol{A = 48,4}$$

Dermed er vinkel $\boldsymbol{A}$ lig med $\boldsymbol{48,4}°$

EKSEMPEL

I den retvinklede trekant ABC får vi oplyst, at $\boldsymbol{c = 6,8}$, vinkel $\boldsymbol{B = 42,8°}$, og vi skal bestemme længden af siden $\boldsymbol{b}$.



Vi tager udgangspunkt i vinkel $\boldsymbol{B}$, da vi har fået oplyst dens gradtal.

Derfor er siden $\boldsymbol{b}$ den modstående katete, og da vi har fået oplyst længden på hypotenusen $\boldsymbol{c}$, skal vi derfor bruge formlen $\sin(v) = \frac{mod}{hyp}$, der i dette tilfælde hedder $\sin(\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$

Vi indsætter vores tal og isolerer $\boldsymbol{b}$:

$$\sin(\boldsymbol{42,8}) = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{6,8}}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for b vha. WordMat.*

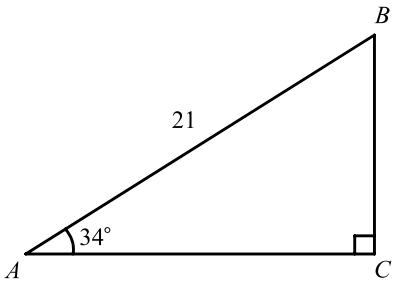
$$\boldsymbol{b = 4,6}$$

Dermed er længden af siden $\boldsymbol{b}$ lig med $\boldsymbol{4,6}$.

YouTube Kort gennemgang af eksemplerne.

Til toppen

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.4 (DELPRØVE 1)

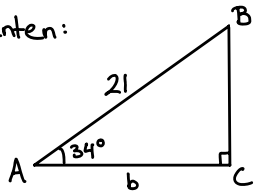


I en retvinklet trekant er $\angle A = 34°$ og hypotenusens længde er 21.

a) Brug oplysningerne til at opstille en ligning, der kan bruges til at bestemme længden af den hosliggende katete til A.

a) I den retvinklede trekant ABC kender vi vinkel A samt længden af hypotenusen, og vi skal bestemme den hosliggende katete til A, som vi kalder b.

Skitse af trekanten:



Derfor skal vi bruge følgende formel: $\cos(v) = \frac{hos}{hyp}$.

Ved at indsætte tallene får vi opstillet den ønskede ligning:

$\cos(34°) = \frac{b}{21}$

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

ENHEDSCIRKLEN

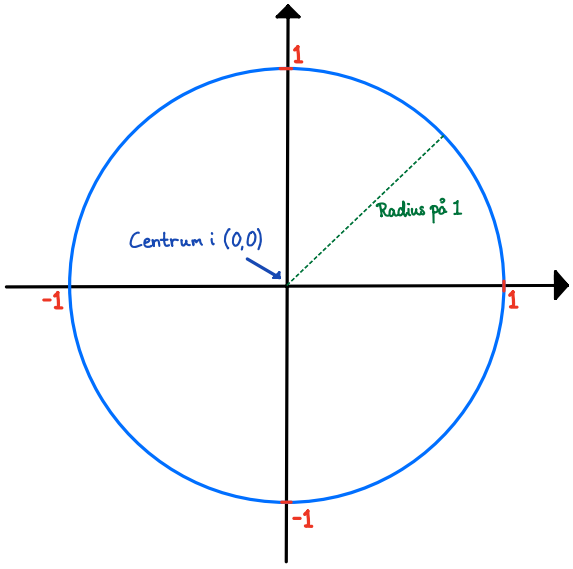
Vi har set på formlerne for sinus, cosinus og tangens, samt set hvordan de kan bruges til at bestemme størrelser i en retvinklet trekant. Nu skal vi prøve at se på sinus, cosinus og tangens fra en ny synsvinkel. Hvis vi får WordMat til at beregne sin(30), så får vi følgende svar:

$$\sin(30) = 0{,}5$$

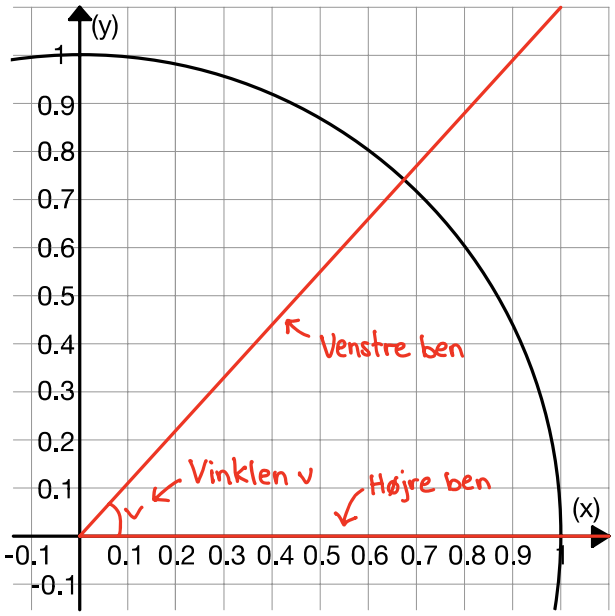
Hvis vi tilsvarende får WordMat til at beregne cos(30), så bliver svaret:

$$\cos(30) \approx 0{,}8660254$$

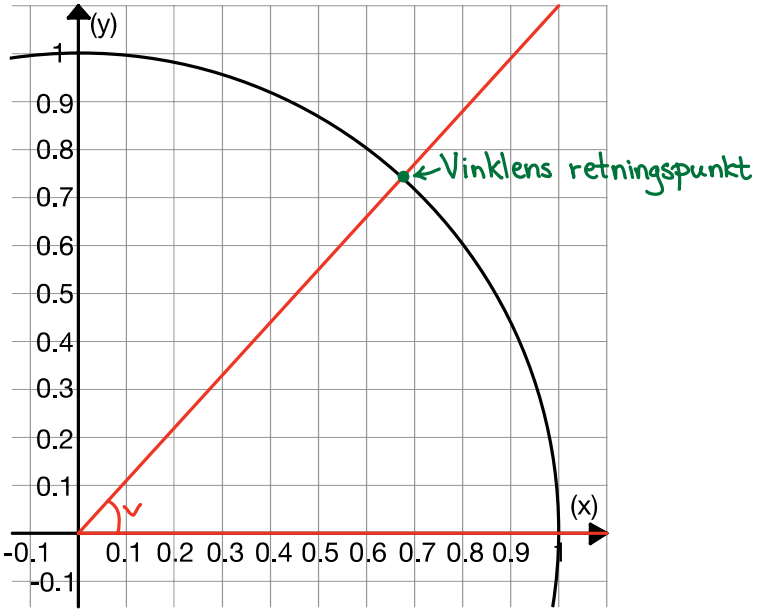
Hvorfor mon det? For at finde svaret, skal vi først kigge på enhedscirklen, der er en cirkel med centrum i (0,0) og en radius på 1:



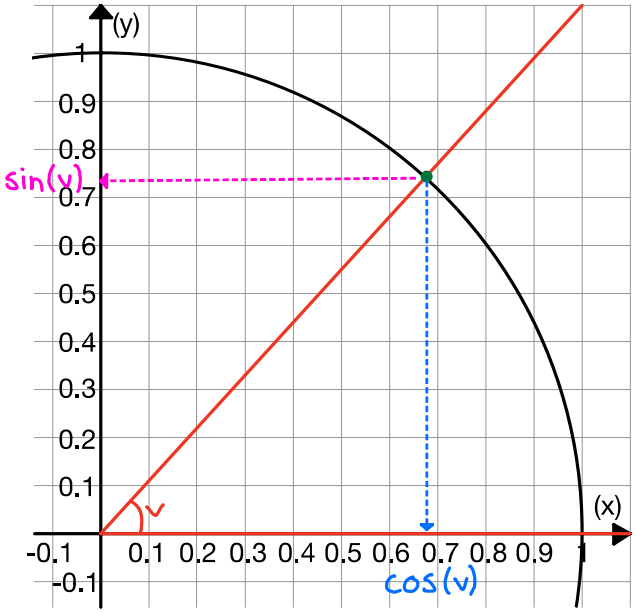
Vi vil kun se på den øvre, højre del af enhedscirklen. Vi placerer et højre ben med begyndelse i (0,0) oven i *x*-aksens positive del. Derudover placerer vi et venstre ben, og mellem benene er vinklen *v*:



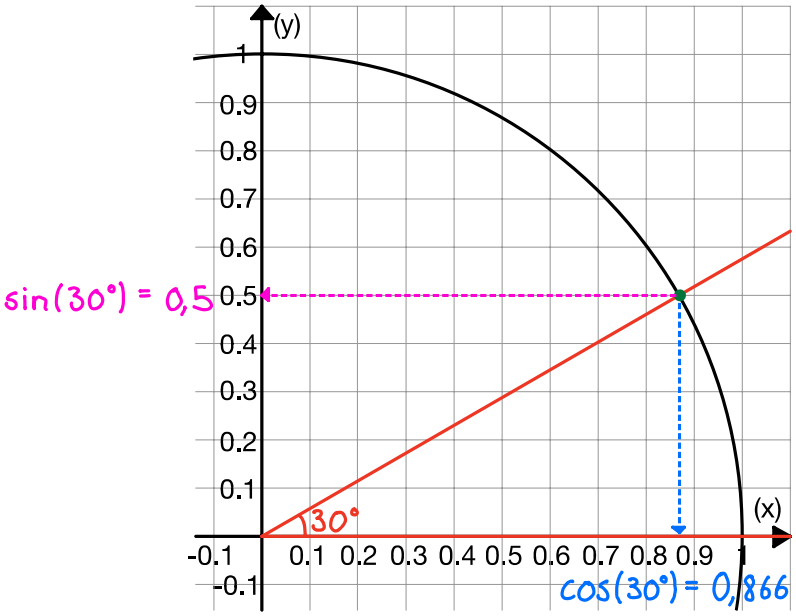
Det punkt, hvor vinklens venstre ben skærer periferien af enhedscirklen, kaldes vinklens *retningspunkt*:



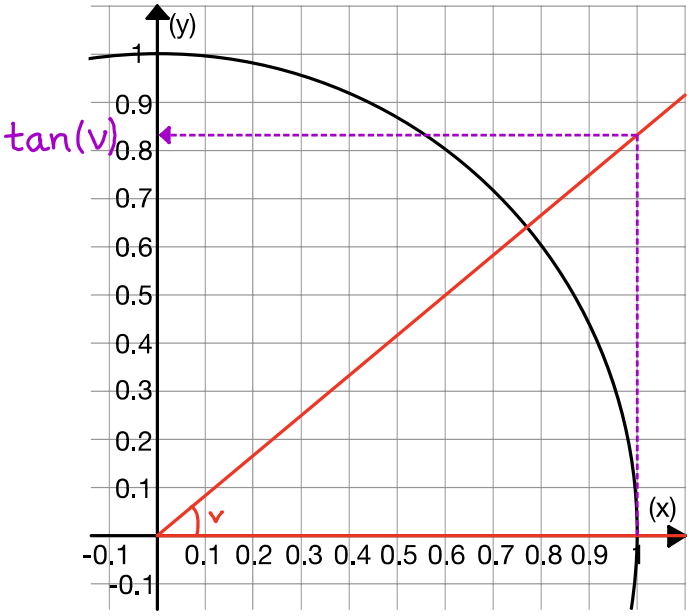
Der gælder, at **$\cos(v)$ er førstekoordinaten til retningspunktet for vinkel v, og $\sin(v)$ er andenkoordinaten til retningspunktet for vinkel v**:



Hvis vi går tilbage til eksemplet med cos(30) og sin(30), så får vi altså de to værdier, fordi de er henholdsvis førstekoordinaten og andenkoordinaten til retningspunktet for vinklen 30°:



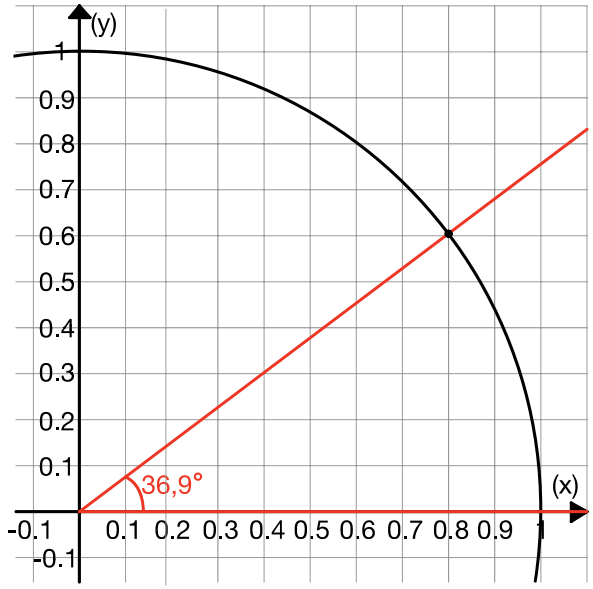
Tangens er lidt anderledes. Der skal vi nemlig finde 1 på x-aksen, gå op til vi rammer venstre ben, og aflæse y-værdien:



YouTube Kort gennemgang af enhedscirklen og sinus, cosinus og tangens.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.5 (DELPRØVE 1)

Bilag vedlagt



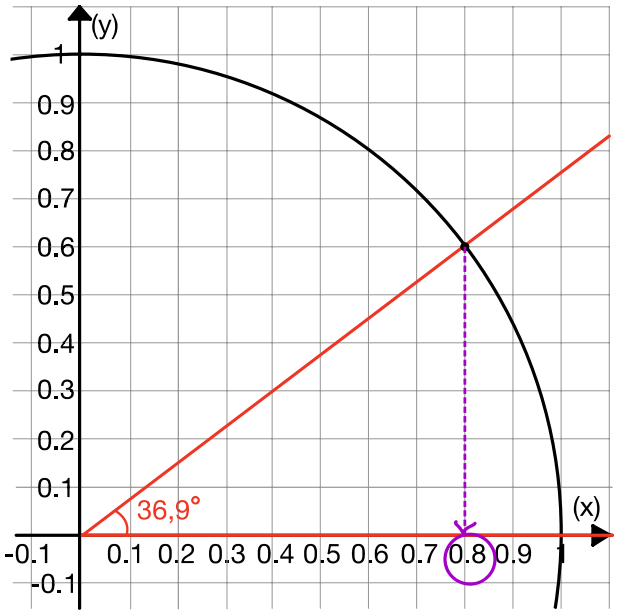
Figuren viser enhedscirklen, hvor en vinkel på 36,9° er indtegnet.

a) Brug enhedscirklen på bilaget til at bestemme cos(36,9°).

a) Vi skal bestemme cos(36,9°) ved hjælp af enhedscirklen på bilaget.

Retningspunktet til vinklen er indtegnet på enhedscirklen, og vi aflæser punktets førstekoordinat (se bilag).

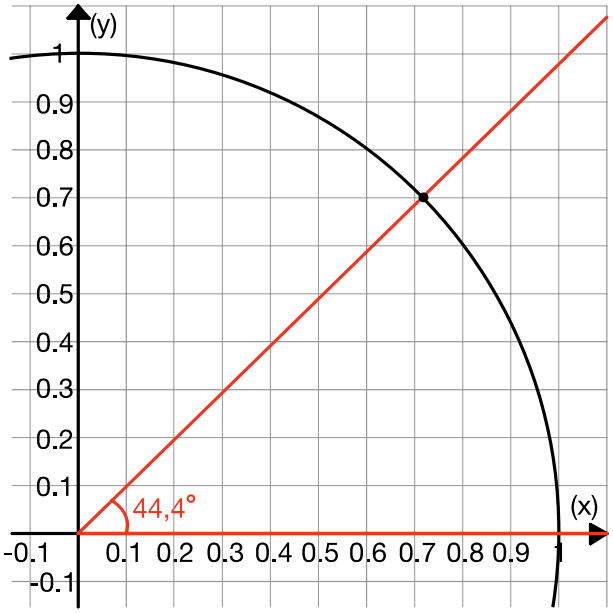
Altså er cos(36,9°) = 0,8.



YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.6 (DELPRØVE 1)

Bilag vedlagt



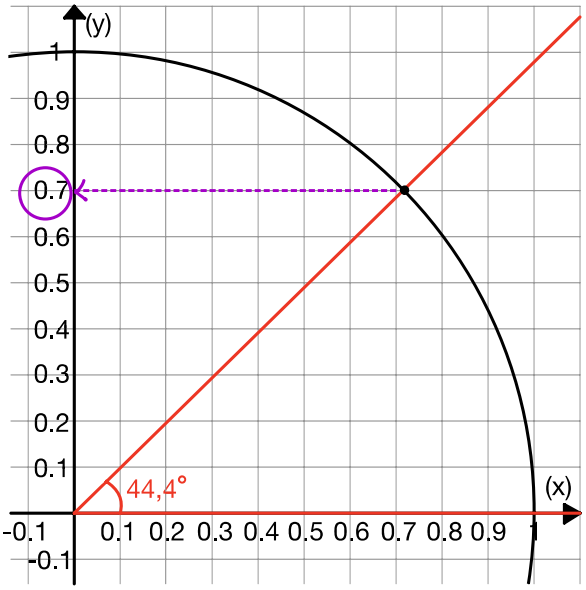
Figuren viser enhedscirklen, hvor en vinkel på 44,4° er indtegnet.

a) Brug enhedscirklen på bilaget til at bestemme sin(44,4°).

a) Vi skal bestemme sin(44,4°) ved hjælp af enhedscirklen på bilaget.

Retningspunktet til vinklen er indtegnet på enhedscirklen, og vi aflæser punktets andenkoordinat (se bilag).

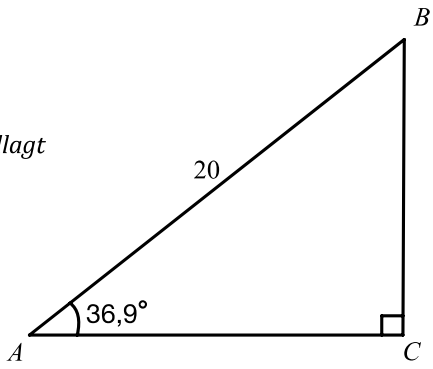
Altså er sin(44,4°) = 0,7.



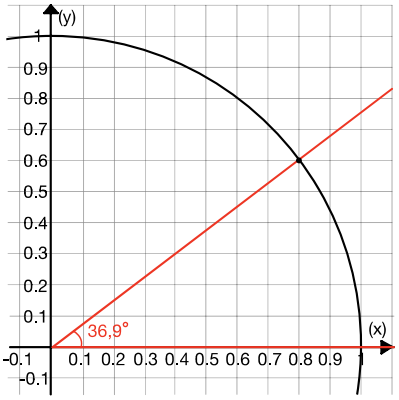
YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.7 (DELPRØVE 1)

Bilag vedlagt



Figur 1



Figur 2

Figur 1 viser den retvinklede trekant ABC. Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

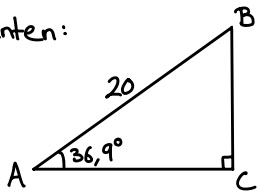
Figur 2 viser enhedscirklen, hvor trekantens vinkel A er indtegnet.

a) Benyt enhedscirklen på bilaget til at aflæse tallet cos (36,9°), og brug en formel til at bestemme længden af siden AC.

a) Vi skal først aflæse cos(36,9°) ved hjælp af enhedscirklen på bilaget.

Retningspunktet til vinklen er indtegnet på enhedscirklen, og vi aflæser punktets førstekoordinat (se bilag). Altså er cos(36,9°) = 0,8.

Skitse af trekanten:



Da vi skal bestemme længden af den hosliggende katete AC, og vi kender længden af hypotenusen AB, benytter vi $\cos(v) = \frac{hos}{hyp}$. Vi indsætter tallene:

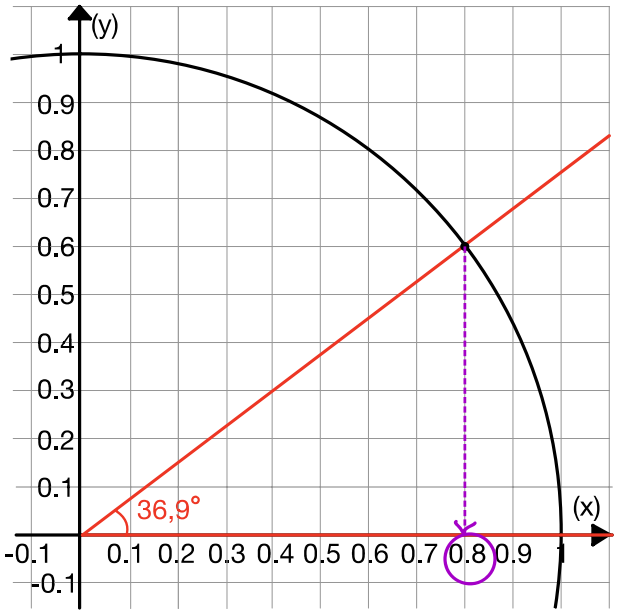
$$\cos(36{,}9°) = \frac{|AC|}{20}$$

$$0{,}8 = \frac{|AC|}{20}$$

$$0{,}8 \cdot 20 = |AC|$$

$$16 = |AC|$$

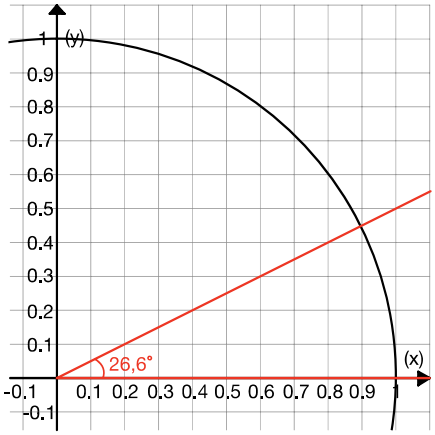
Altså er længden af AC 16.



YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.8 (DELPRØVE 1)

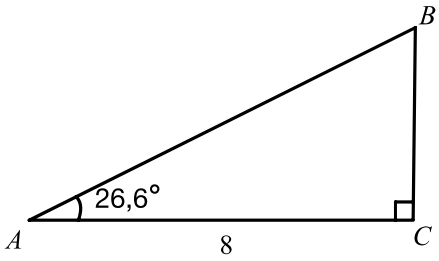
Bilag vedlagt



Figur 1

Figur 1 viser et koordinatsystem med enhedscirklen, hvor en vinkel på 26,6° er indtegnet.

a) Benyt figuren på bilaget til at bestemme tan (26,6°).



Figur 2

Figur 2 viser en retvinklet trekant ABC, hvor nogle af trekantens mål er angivet.

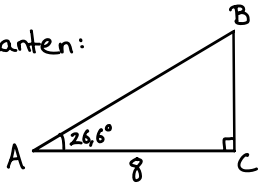
b) Bestem længden af kateten a.

a) Vi skal bestemme tan(26,6°) ved hjælp af enhedscirklen på bilaget.
Vi finder 1 på x-aksen og går op, indtil vi rammer venstre vinkelben, hvorefter vi aflæser y-værdien (se bilag).

Altså er tan(26,6°) = 0,5.

Vi skal nu bestemme længden af katete a i den retvinklede trekant ABC, hvor vi kender vinkel A = 26,6° og den hosliggende katete b = 8.

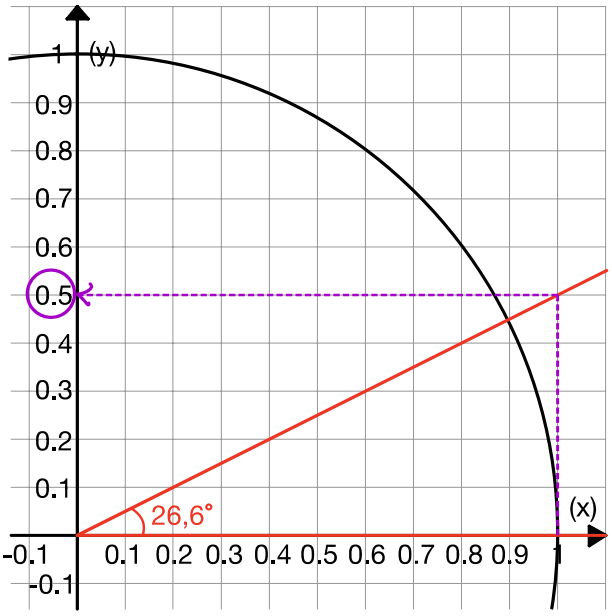
Skitse af trekanten:



Vi bruger derfor formlen $\tan(v) = \frac{\text{mod}}{\text{hos}}$ og indsætter tallene og isolerer a:

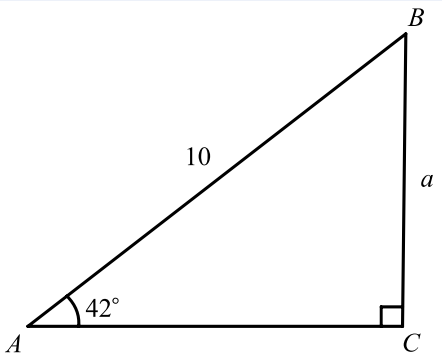
$$\tan(26{,}6°) = \frac{a}{8}$$
$$\tan(26{,}6°) \cdot 8 = a$$
$$0{,}5 \cdot 8 = a$$
$$4 = a$$

Altså er længden af kateten a lig med 4.



YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.9 (DELPRØVE 1)



Figur 1

Tabelværdier
$\sin(42°) = 0{,}669$
$\cos(42°) = 0{,}743$
$\tan(42°) = 0{,}900$

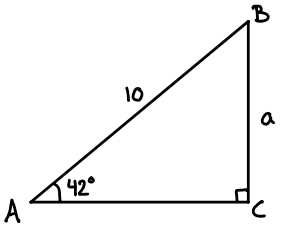
Figur 2

Figur 1 viser en retvinklet trekant ABC. Nogle af målene er angivet på trekanten.

Figur 2 viser udvalgte tabelværdier for sinus, cosinus og tangens.

a) Benyt en formel til at bestemme længden af siden a.

a) Skitse af trekant ABC:



Vi skal bestemme længden af den modstående katete a, og vi kender længden af hypotenusen. Vi skal derfor bruge formlen $\sin(v) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}}$.

I tabellen på figur 2 får vi oplyst, at $\sin(42°) = 0{,}669$, så vi kan sætte tallene ind og isolere a:

$$\sin(42°) = \frac{a}{10}$$
$$0{,}669 = \frac{a}{10}$$
$$0{,}669 \cdot 10 = a$$
$$6{,}69 = a$$

Altså er længden af siden a lig med 6,69.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

SINUSRELATIONERNE (SUPPLERENDE STOF)

Mens formlerne for sinus, cosinus og tangens samt Pythagoras Sætning kun kan benyttes i retvinklede trekanter, skal vi nu se på sinusrelationerne, der kan bruges i alle slags trekanter - også kaldet *vilkårlige* trekanter.

Sinusrelationerne fås i to forskellige udgaver og kan benyttes til at bestemme vinkler eller sider i en vilkårlig trekant:

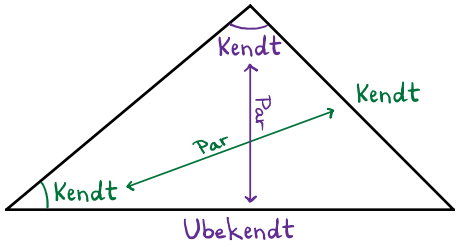
$$\frac{\sin(A)}{a}=\frac{\sin(B)}{b}=\frac{\sin(C)}{c} \quad \text{og} \quad \frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}$$

Da vi isolerer ved hjælp af WordMat, har det ikke betydning, hvilken udgave vi vælger.

I formlen optræder størrelserne i par bestående af en vinkel og en side, nemlig A sammen med a, B sammen med b og C sammen med c.

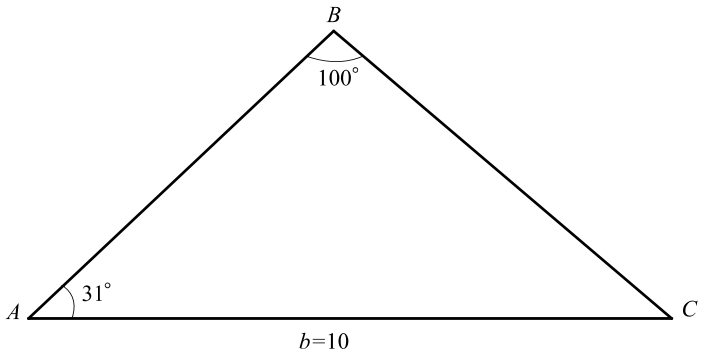
Læg mærke til, at sinusrelationerne indeholder to lighedstegn og tre par, men vi skal altid kun vælge to par, således at formlen består af fire størrelser, eksempelvis: $\frac{\sin(A)}{a}=\frac{\sin(C)}{c}$.

Vi skal vælge vores to par, således at vores formel kun indeholder én ubekendt, når vi har indsat vores tal.



EKSEMPEL

I trekant ABC får vi oplyst, at $b=10$, vinkel $B=100°$, og vinkel $A=31°$, og vi skal bestemme længden af siden a.



Vi kender vinklerne A og B samt siden b, og sammen med den ubekendte a danner de to par. Derfor bruger vi følgende sinusrelation $\frac{\sin(A)}{a}=\frac{\sin(B)}{b}$.

Vi indsætter tallene og isolerer a:

$$\frac{\sin(31)}{a}=\frac{\sin(100)}{10}$$

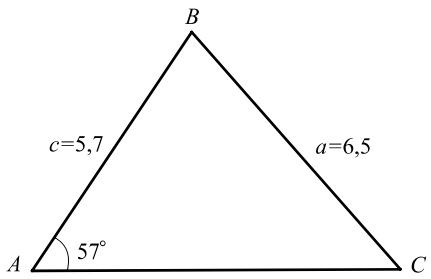
⇕ *Ligningen løses for a vha. WordMat.*

$$a=5,2$$

Dermed er længden af siden a lig med $5,2$.

EKSEMPEL

I trekant ABC får vi oplyst, at $\boldsymbol{a = 6,5}$, $\boldsymbol{c = 5,7}$, og vinkel $\boldsymbol{A = 57°}$, og vi skal bestemme vinkel $\boldsymbol{C}$.



Vi kender vinkel $\boldsymbol{A}$ samt siderne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{c}$, og sammen med den ubekendte vinkel $\boldsymbol{C}$ danner de to par. Derfor bruger vi følgende sinusrelation $\frac{\sin(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{a}} = \frac{\sin(\boldsymbol{C})}{\boldsymbol{c}}$.

Vi indsætter tallene og isolerer C:

$$\frac{\sin(\boldsymbol{57})}{\boldsymbol{6,5}} = \frac{\sin(\boldsymbol{C})}{\boldsymbol{5,7}}$$

⇕ *Ligningen løses for C vha. WordMat.*

$$\boldsymbol{C = 47,3}$$

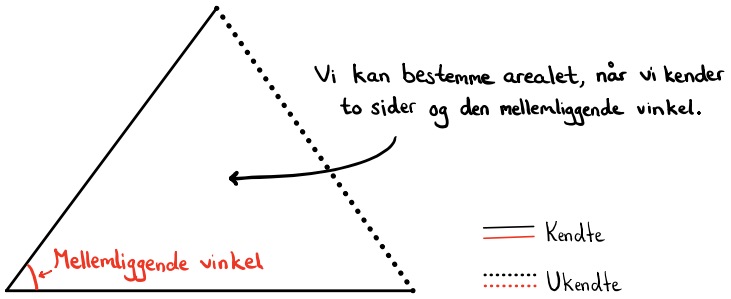
Dermed er vinkel C lig med $\boldsymbol{47,3°}$

YouTube Kort gennemgang af sinusrelationerne samt eksemplerne.

DEN NYE AREALFORMEL (SUPPLERENDE STOF)

Fra folkeskolen har vi lært, at vi kan bestemme arealet af en trekant, hvis vi kender en grundlinje og en højde.

Med den nye arealformel kan vi i stedet bestemme arealet, hvis vi kender to sider og den *mellemliggende* vinkel:



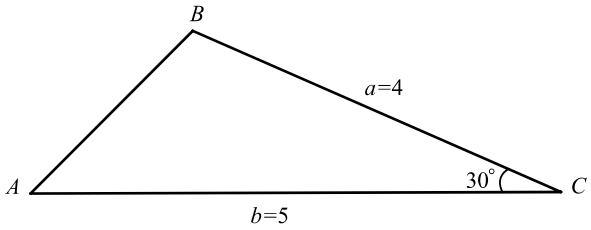
Den nye arealformel fås i tre forskellige udgaver, der alle kan bruges til at bestemme arealet T:

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A) \qquad T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C) \qquad T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B)$$

Som det ses i alle tre udgaver af formlen, indeholder de hver især to sidelængder og den mellemliggende vinkel.

EKSEMPEL

I trekant ABC får vi oplyst, at $a = 4$, $b = 5$ og vinkel $C = 30°$, og vi skal bestemme arealet T.



Her kender vi netop to sider a og b og den mellemliggende vinkel C.

Da det i dette tilfælde er vinkel C, bruger vi formlen $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$.

Vi indsætter tallene og bestemmer arealet:

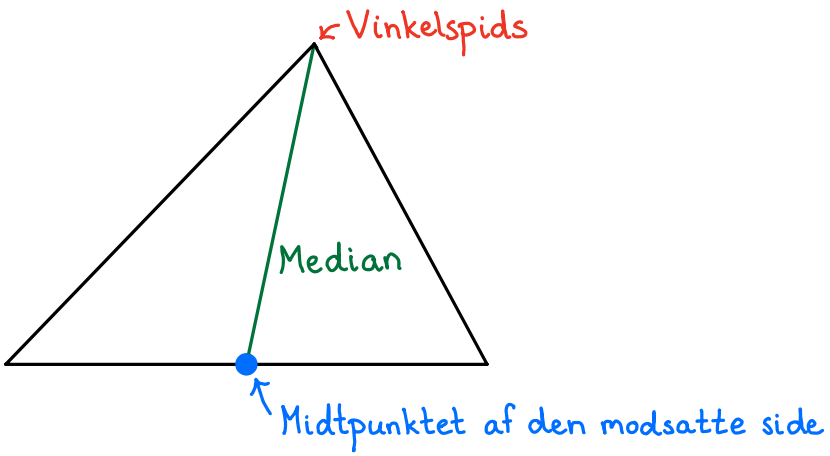
$$T = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin(30) = 5$$

Altså er arealet af trekanten lig med 5.

YouTube Kort gennemgang af den nye arealformel og eksemplet.

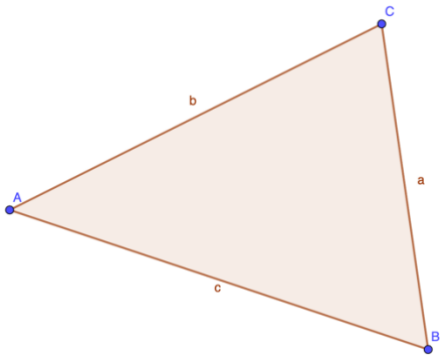
MEDIAN

Medianen er et linjestykke fra en **vinkelspids** til **midtpunktet af den modstående side**.



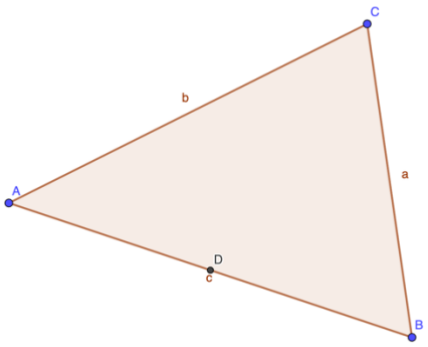
Vi vil nu se, hvordan vi tegner medianen i Geogebra. Et eksempel fra en eksamenslignende opgave kan ses her.

I dette eksempel tegner vi medianen fra vinkel C til den modstående side AB.

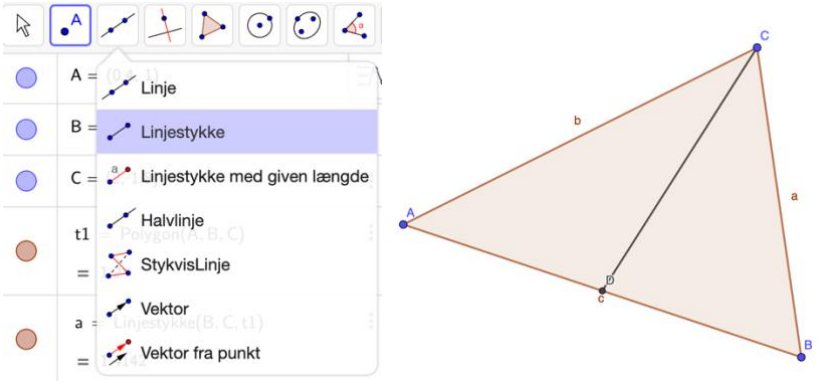


Vi skal først bestemme midtpunktet ved at trykke på ikonet "Midtpunkt eller centrum" og derefter trykke på A og B *eller* blot linjestykket på trekanten. Derefter tegnes midtpunktet (kaldet D på figuren):



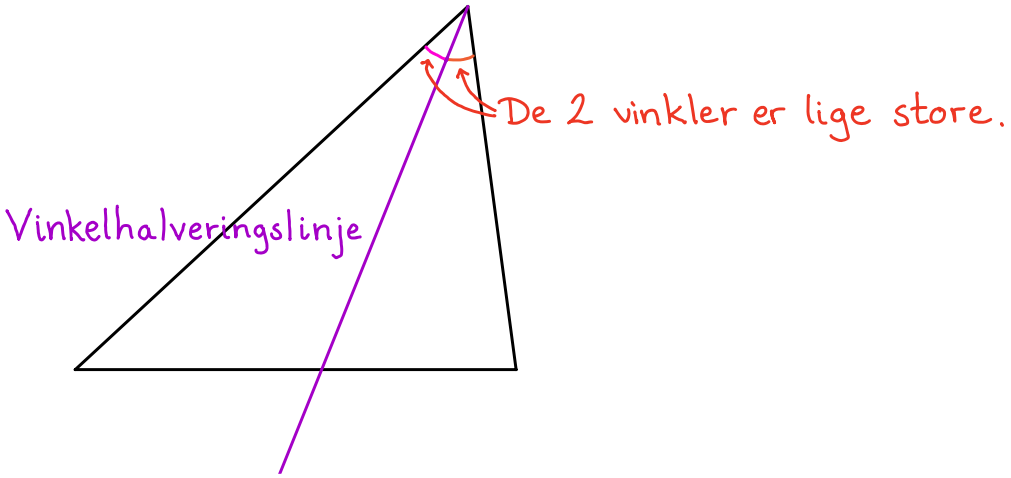


Derefter kan vi tegne medianen ved at vælge linjestykke og trykke på C og D:



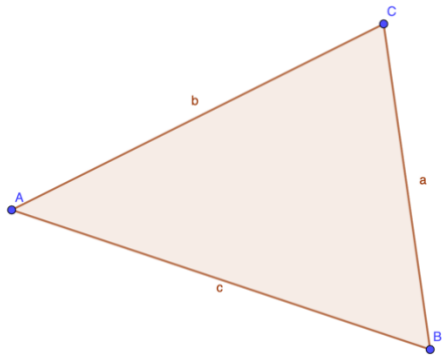
VINKELHALVERINGSLINJE

En **vinkelhalveringslinje** er en linje, der deler **en vinkel i to lige store dele**.

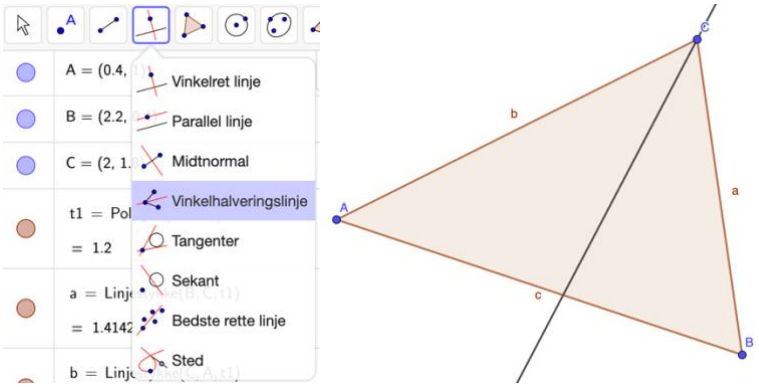


Vi vil nu se, hvordan vi tegner vinkelhalveringslinjen i Geogebra. Et eksempel fra en eksamenslignende opgave kan ses her.

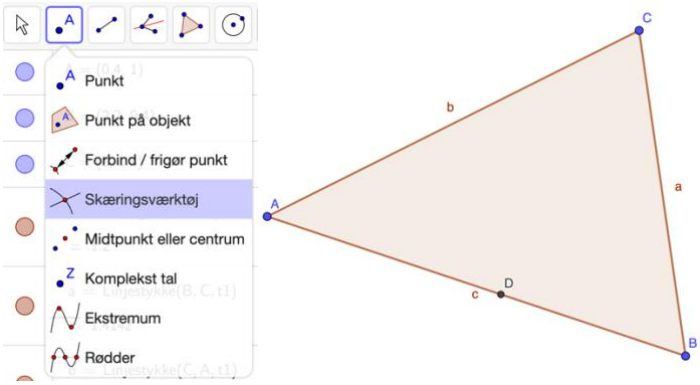
Neden for vil vi se, hvordan vi tegner vinkelhalveringslinjen, der deler vinkel C.

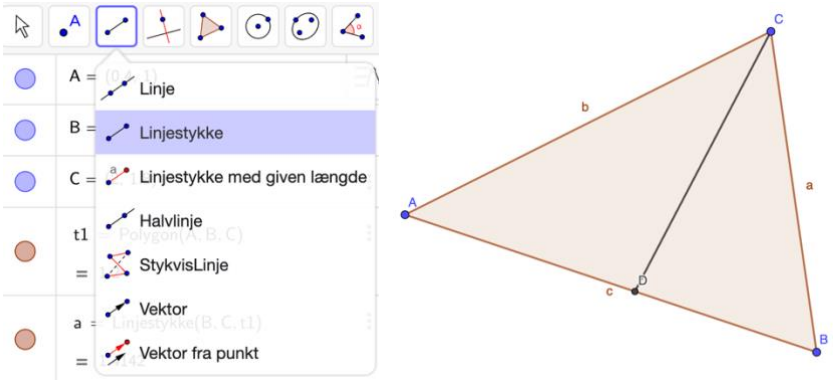


Vi tegner nu vinkelhalveringslinjen ved at trykke på "Vinkelhalveringslinje" og derefter trykke på A, C og B (det er vigtigt, at den vinkel, der skal halveres, bliver trykket på som nummer to):



Hvis vi kun ønsker at tegne vinkelhalveringslinjen som et linjestykke, kan vi bestemme skæringen mellem linjestykket AB og vinkelhalveringslinjen (her kaldet D) og derefter tegne linjestykket:





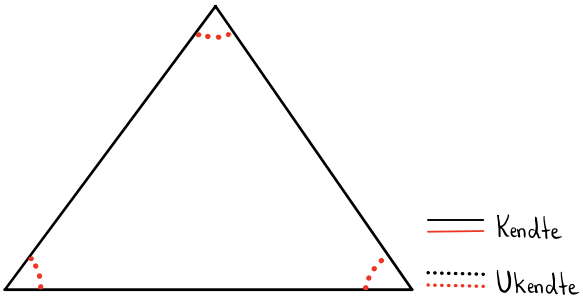
YouTube [Kort gennemgang af median og vinkelhalveringslinje i Geogebra.]

DE FEM TREKANTSTILFÆLDE

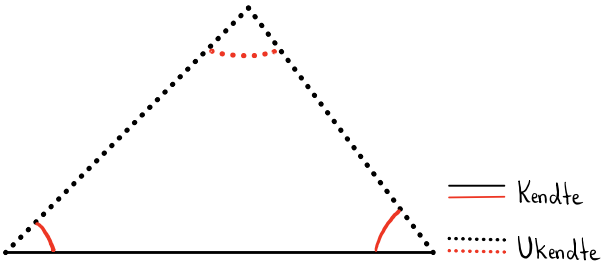
Vi skal nu se, hvordan vi kan konstruere trekanter i Geogebra.

Vi kan opdele vores trekanter i fem trekantstilfælde ud fra de tre oplysninger, vi kender om trekanterne:

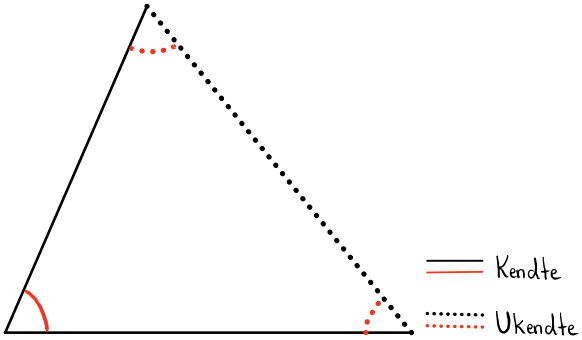
1) Vi kender alle tre sider:



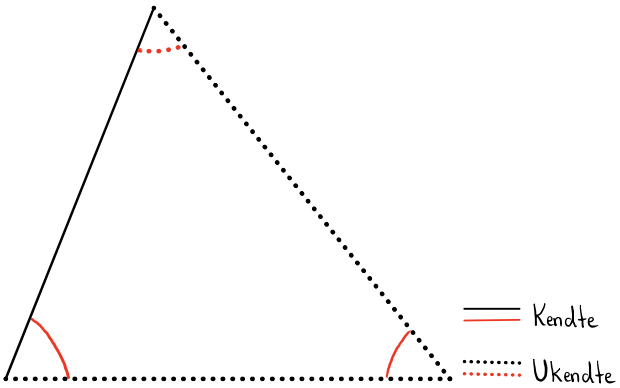
2) Vi kender to vinkler og den mellemliggende side:



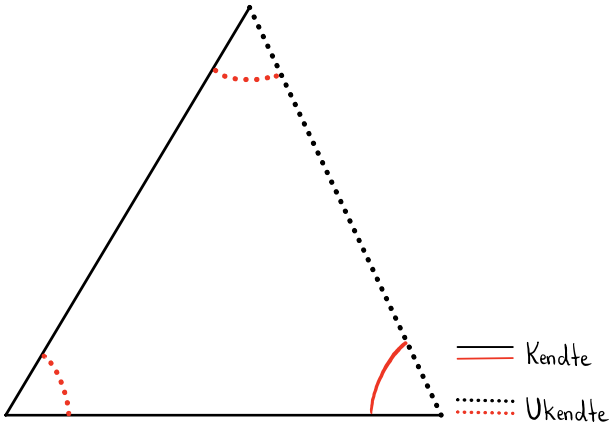
3) Vi kender to sider og den mellemliggende vinkel:



4) Vi kender to vinkler og en ikke-mellemliggende side:



5) Vi kender to sider og en ikke-mellemliggende vinkel:

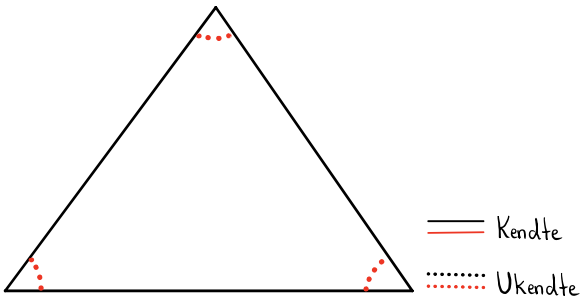


De fem trekantstilfælde kræver hver sin trekantskonstruktion, som bliver gennemgået på de følgende sider.

YouTube Kort gennemgang af de fem trekantstilfælde.

KONSTRUKTION AF TREKANTSTILFÆLDE 1

I første trekantstilfælde kender vi alle tre sider.



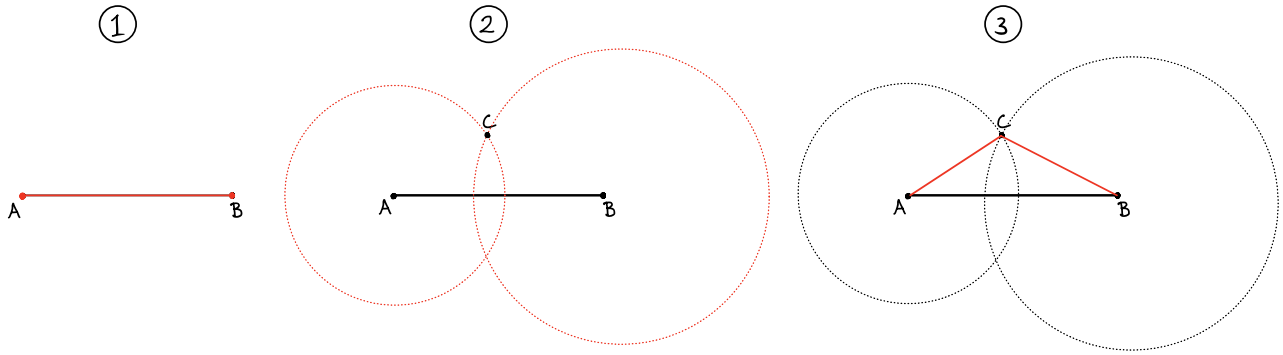
I Geogebra må vi **ikke** blot tage tre linjestykker med givne længder og få dem til at passe sammen.

I stedet skal følgende fremgangsmåde benyttes (Her er AB, AC og BC kendt):

1. Først konstrueres linjestykket AB.

2. Derefter konstrueres to cirkler: Den ene med centrum i A og radius $|AC|$. Den anden med centrum i B og radius $|BC|$. Ét af skæringspunkterne mellem de to cirkler bestemmes (punkt C).

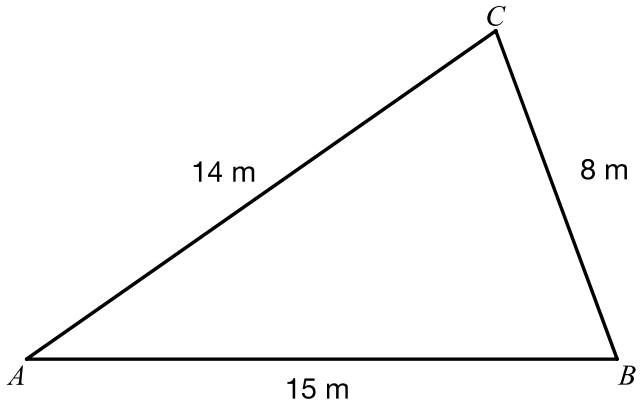
3. Til sidst konstrueres hele trekanten ud fra de tre punkter A, B og C.



YouTube [Kort video om konstruktion af trekantstilfælde 1.]

YouTube [Konkret taleksempel med konstruktion af trekantstilfælde 1.]

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.10 (DELPRØVE 2)



Figuren viser en model af en græsplæne, der har form som en trekant. Nogle af målene fremgår af figuren.

a) Konstruér en målfast tegning af trekant ABC. Forklar konstruktionen.

b) Bestem arealet af trekanten.

a)

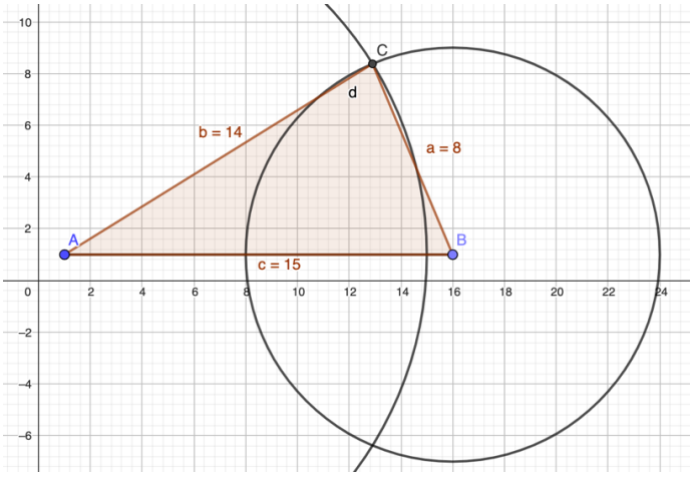
Først danner jeg linjestykket AB med længden 15 (Linjestykke med given længde).

Så tegner jeg en cirkel med centrum i A og radius 14 (cirkel ud fra centrum og radius).

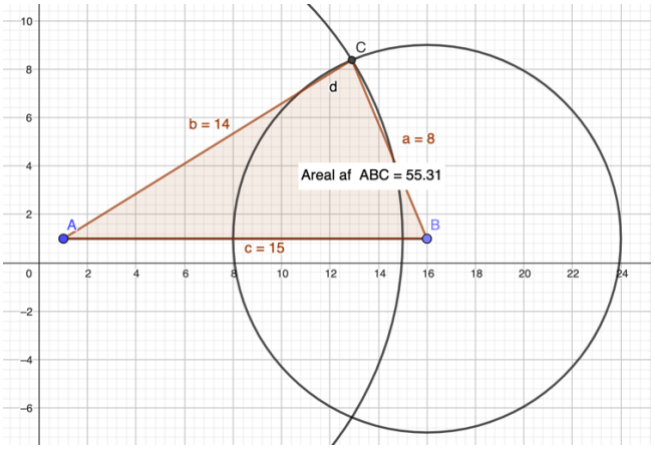
Derefter tegner jeg en cirkel med centrum i B og radius 8 (cirkel ud fra centrum og radius).

Hvor de to cirkler skærer hinanden, danner jeg punket C (skæringsværktøj).

Jeg færdiggør trekanten ved hjælp af Polygon og sætter længder på alle siderne (længde).



b)
Jeg skal bestemme arealet af trekant ABC. Da jeg har tegnet et polygon, skal jeg blot vælge areal-værktøjer og trykke på trekanten:

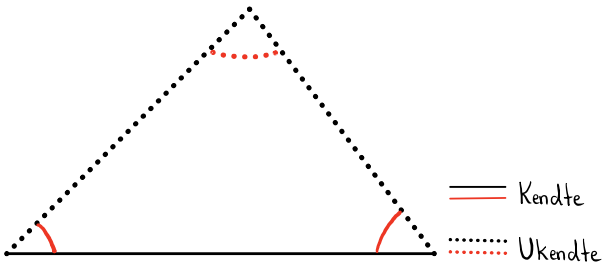


Altså er arealet af trekant ABC 55, 31 m².

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

KONSTRUKTION AF TREKANTSTILFÆLDE 2

Vi kender to vinkler og den mellemliggende side.



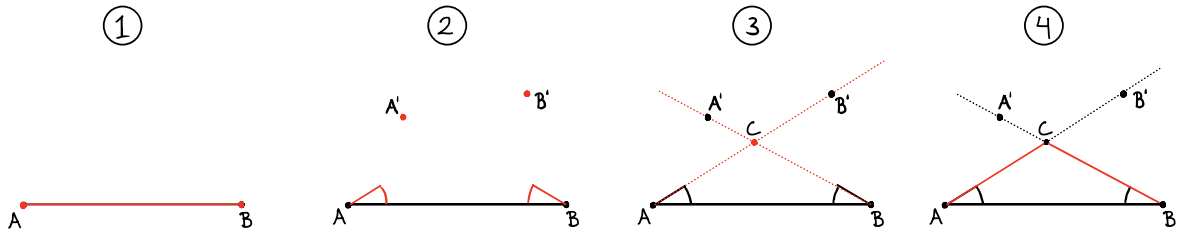
Fremgangsmåden er som følger (Her er AB samt vinklerne A og B kendt):

1. Først konstrueres det kendte linjestykke AB.

2. Derefter konstrueres de to vinkler A og B. Der bliver dannet to hjælpepunkter A' og B'.

3. Halvlinjer tegnes gennem A og B' samt B og A' og C bestemmes som skæringspunktet mellem de to halvlinjer.

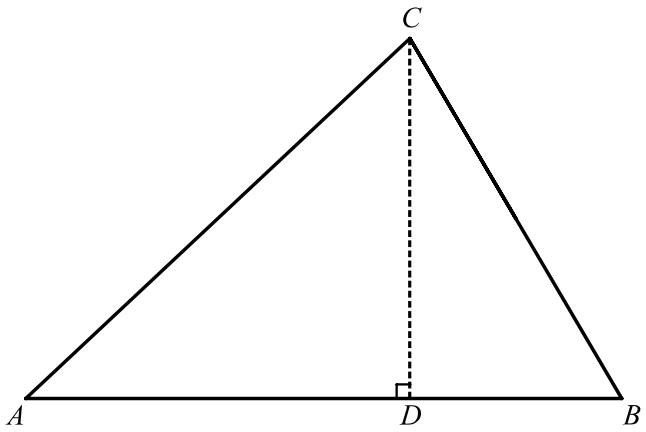
4. Til sidst konstrueres hele trekanten ud fra de tre punkter A, B og C.



YouTube [Kort video om konstruktion af trekantstilfælde 2.]

YouTube [Konkret taleksempel med konstruktion af trekantstilfælde 2.]

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.11 (DELPRØVE 2)



Figuren viser trekant ABC, hvor vinkel A er 40°, vinkel $B = 56°$ og $|AB| = 8$.

a) Udfør en målfast konstruktion af trekant ABC, og forklar konstruktionen.

Punktet D ligger lodret under punktet C, se figuren.

b) Bestem afstanden fra D til B.

a)

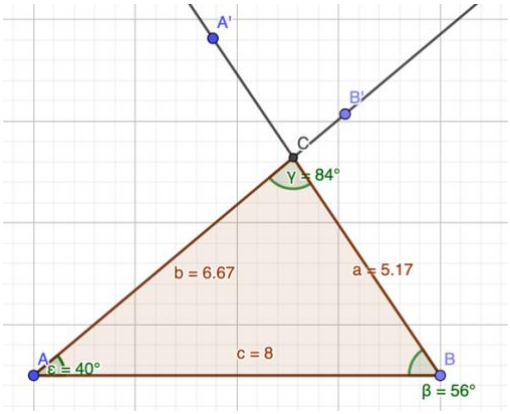
Først danner jeg linjestykket AB med længden 8 (Linjestykke med given længde).

Derefter danner jeg vinklen A på 40° (Vinkel med given størrelse - mod uret).

Derefter danner jeg vinklen B på 56° (Vinkel med given størrelse - med uret).

Fra vinklerne A og B bliver der dannet to hjælpepunkter. Jeg tegner en halvlinje fra vinkel A til B' og fra vinkel B til A' og finder skæringen mellem de to halvlinjer, hvor jeg danner punktet C (Skæringsværktøj).

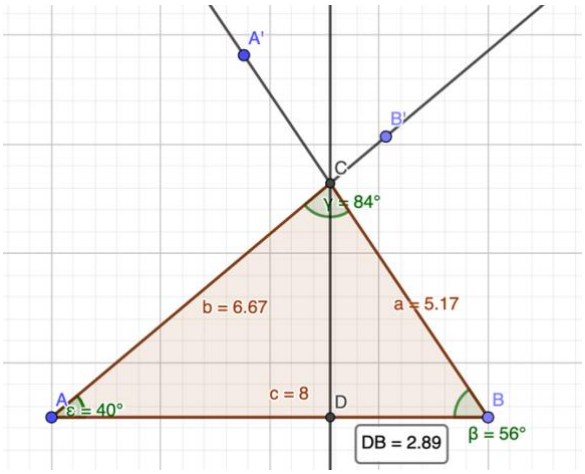
Jeg færdiggør trekanten ved hjælp af Polygon og sætter længder på alle siderne (Længde).



b)
Først danner jeg en linje, der står vinkelret på AB og går gennem punktet C (Vinkelret linje).

Jeg finder derefter skæringspunktet mellem linjen og AB, hvor punktet D bliver dannet (Skæringsværktøj).

Til sidst bestemmer jeg afstanden fra D til B (Længde).

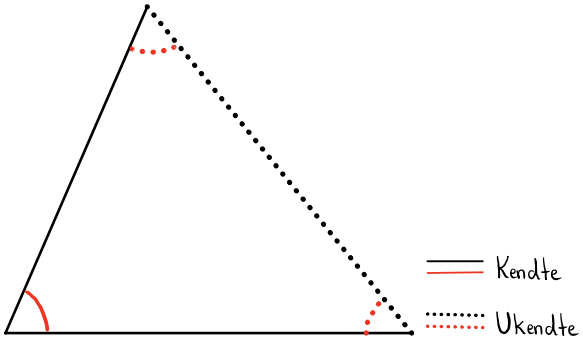


Altså er afstanden fra D og B 2, 89.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

KONSTRUKTION AF TREKANTSTILFÆLDE 3

Vi kender to sider og den mellemliggende vinkel.



Fremgangsmåden er som følger (Her er AB, AC og vinklen A kendt):

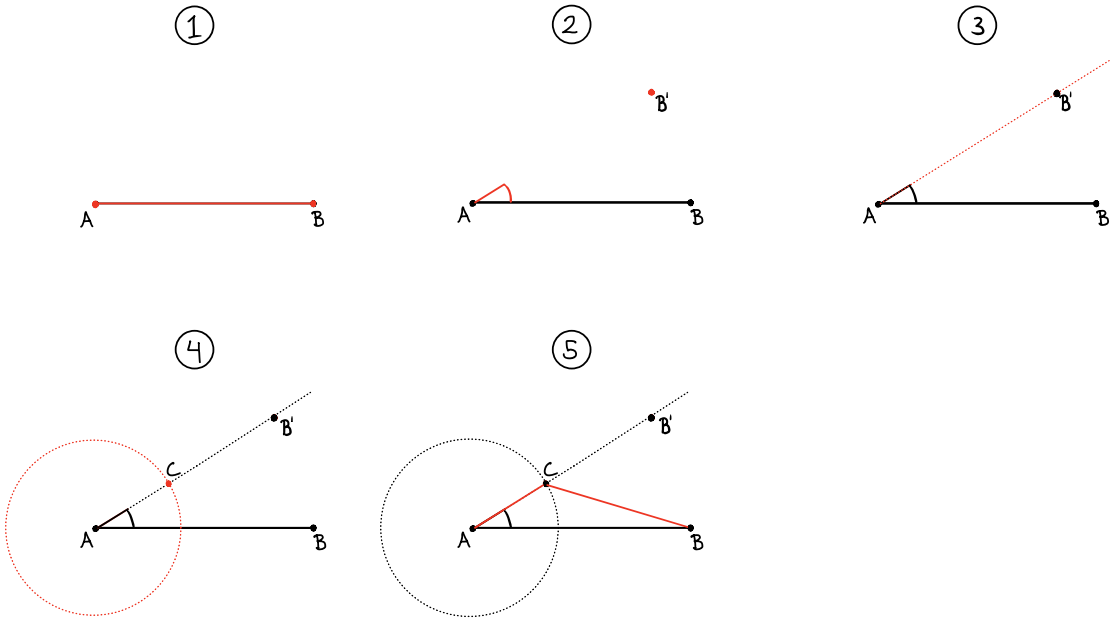
1. Først konstrueres det kendte linjestykke AB.

2. Derefter konstrueres den kendte vinkel A. Hjælpepunktet B' dannes.

3. En halvlinje tegnes gennem A og B'.

4. En cirkel med centrum i A og radius $|AC|$ konstrueres og C bestemmes som skæringen mellem halvlinjen og cirklen.

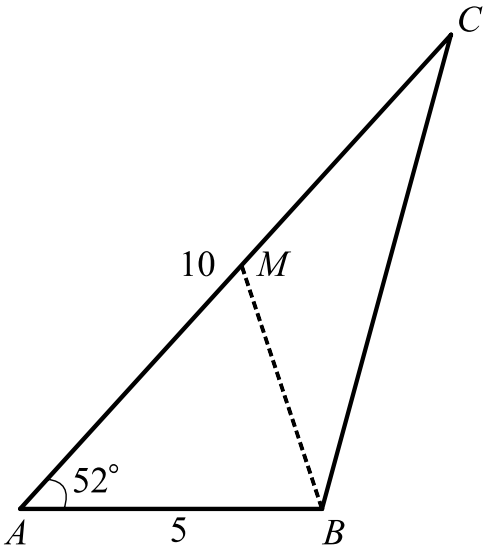
5. Til sidst konstrueres hele trekanten ud fra de tre punkter A, B og C.



YouTube [Kort video om konstruktion af trekantstilfælde 3.]

YouTube [Konkret taleksempel med konstruktion af trekantstilfælde 3.]

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.12 (DELPRØVE 2)



Figuren viser trekant ABC, hvor vinkel $A = 52°$, $|AB| = 5$ og $|AC| = 10$.

a) Udfør en målfast konstruktion af trekant ABC, og forklar konstruktionen.

Medianen fra B skærer siden AC i punktet M.

b) Bestem længden af medianen BM.

a)

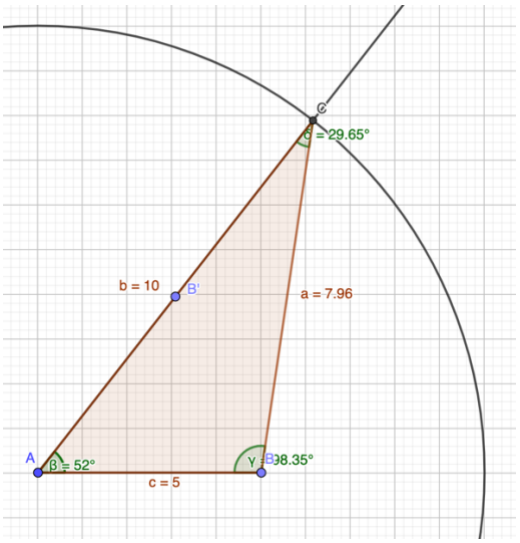
Først danner jeg linjestykket AB med længden 5 (Linjestykke med given længde).

Derefter danner jeg vinklen A på 52° (Vinkel med given størrelse - mod uret).

Jeg laver nu en halvlinje gennem A og hjælpepunktet og danner derefter en cirkel med centrum i A og radius 10 (Cirkel ud fra centrum og radius).

Derefter danner jeg punktet C, som er skæringspunktet mellem halvlinjen og cirklen (Skæringsværktøj).

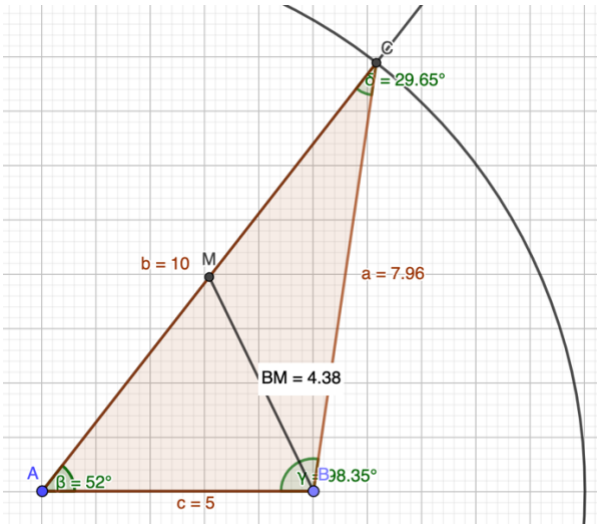
Jeg færdiggør trekanten ved hjælp af Polygon og sætter længder på alle siderne (Længde).



b)
Først danner jeg midtpunktet mellem A og C. Punktet M bliver dannet (Midtpunkt eller centrum).

Derefter danner jeg et linjestykke, der går fra B til M (Linjestykke linje).

Til sidst bestemmer jeg længden af BM (Længde).

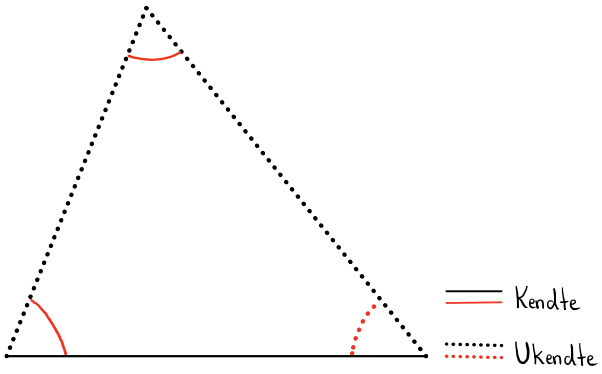


Dermed er længden af BM 4,38.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

KONSTRUKTION AF TREKANTSTILFÆLDE 4

Vi kender to vinkler og en ikke-mellemliggende side.



Når vi kender to vinkler, kan vi hurtigt bestemme den sidste vinkel, da vinkelsummen i en trekant er 180°.

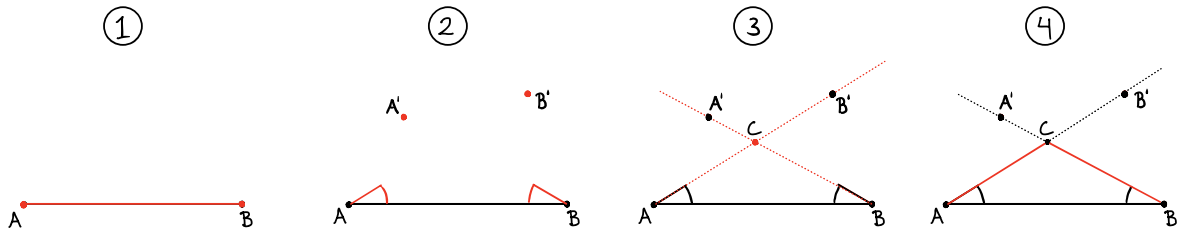
Fremgangsmåden er som følger (Her er AB samt vinklerne A og C kendt):

1. Først konstrueres det kendte linjestykke AB.

2. Vinkel B bestemmes, da $B = 180° - A - C$. Derefter konstrueres de to vinkler A og B. Der bliver dannet to hjælpepunkter A' og B'.

3. Halvlinjer tegnes gennem A og B' samt B og A' og C bestemmes som skæringspunktet mellem de to halvlinjer.

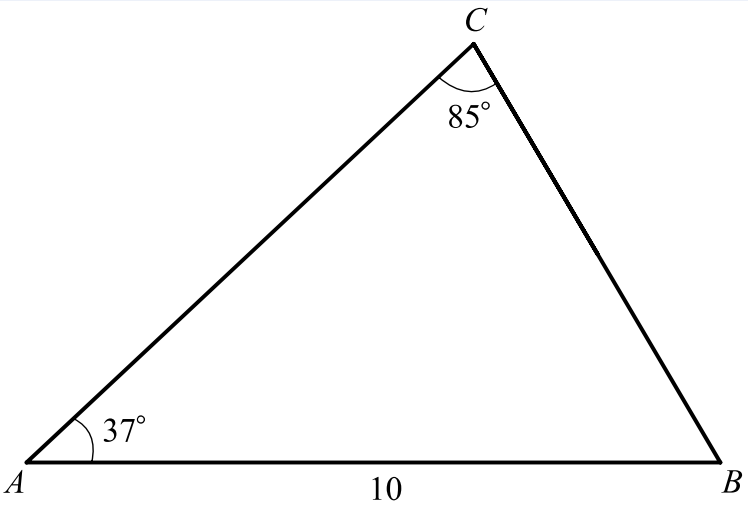
4. Til sidst konstrueres hele trekanten ud fra de tre punkter A, B og C.



YouTube [Kort video om konstruktion af trekantstilfælde 4.]

YouTube [Konkret taleksempel med konstruktion af trekantstilfælde 4.]

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.13 (DELPRØVE 2)



Figuren viser en trekant ABC, hvor $|AB| = 10$, $\angle A = 37°$ og $\angle C = 85°$.

a) Bestem vinkel B, og konstruér en målfast tegning af trekant ABC.

b) Bestem ved hjælp af konstruktionen længden af siden AC med 4 decimaler.

a)
Jeg bestemmer først vinkel B, hvor jeg udnytter, at vinkelsummen i trekanten er 180°:

$$B = 180° - A - C = 180° - 37° - 85° = 58°$$

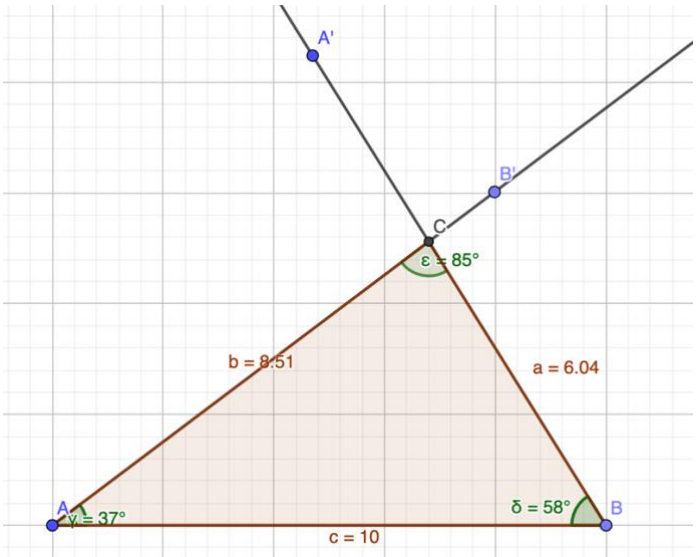
Jeg konstruerer derefter trekanten:

Først laver jeg siden AB med længden 10 (Linjestykke med given længde).

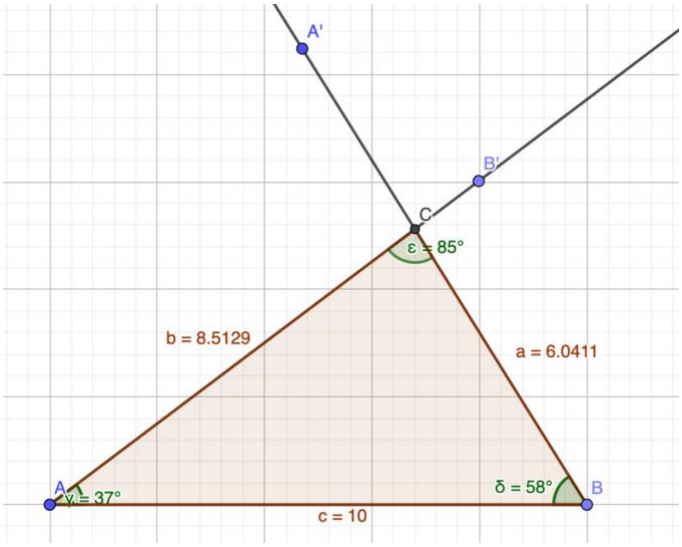
Derefter laver jeg vinklerne A på 37° (Vinkel med given størrelse - mod uret) og B på 58° (Vinkel med given størrelse - med uret) og tegner halvlinjer fra hhv. A og B gennem B' og A'.

Der hvor de to halvlinjer skærer hinanden, laver jeg punktet C (Skæringsværktøj).

Jeg færdiggør trekanten ved hjælp af Polygon og sætter længder på alle siderne (Længde).



b)
Jeg skal bestemme længden af siden AC med 4 decimaler, så jeg får Geogebra til at angive længderne med 4 decimaler:

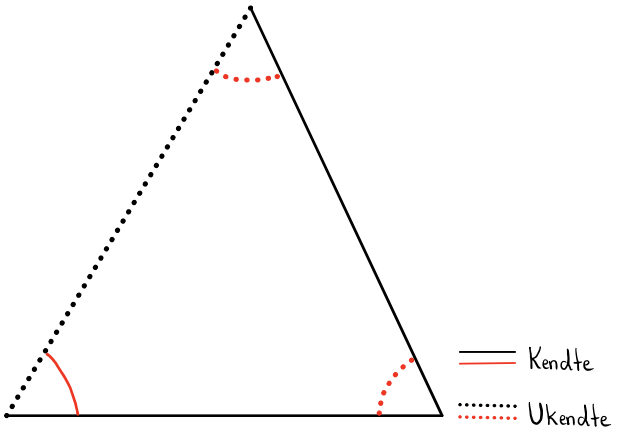


Altså er længden af AC 8,5129.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

KONSTRUKTION AF TREKANTSTILFÆLDE 5

Vi kender to sider og en ikke-mellemliggende vinkel.



I dette trekantstilfælde er det faktisk nogle gange muligt at konstruere to forskellige trekanter (se neden for).

Fremgangsmåden er som følger (Her er AB, BC og vinklen A kendt):

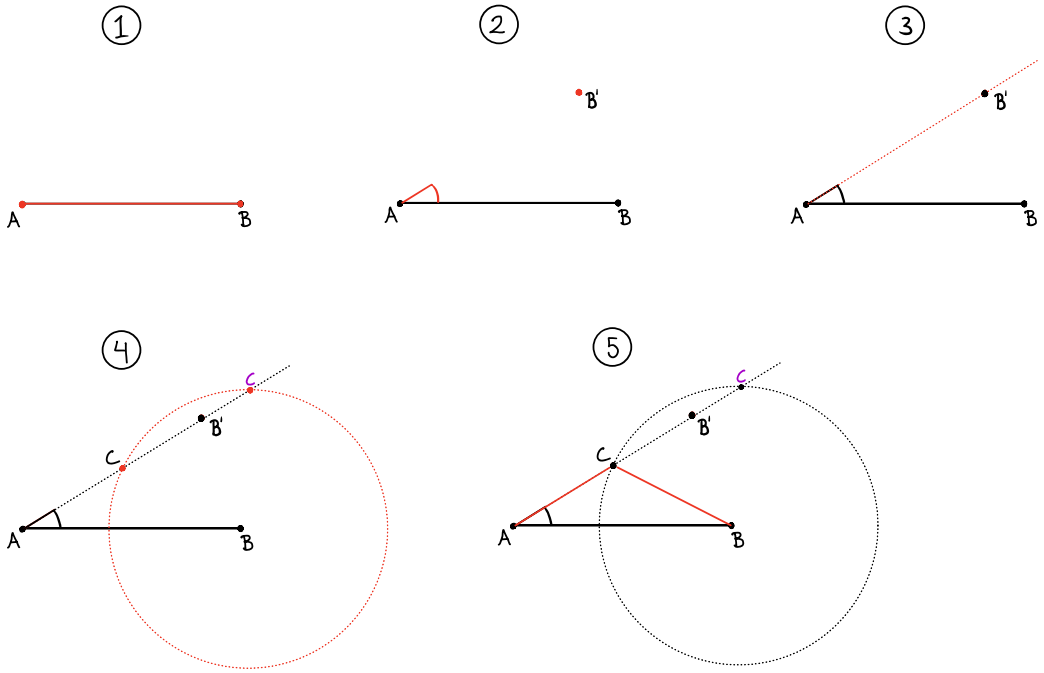
1. Først konstrueres det kendte linjestykke AB.

2. Derefter konstrueres den kendte vinkel A. Hjælpepunktet B' dannes.

3. En halvlinje tegnes gennem A og B'.

4. En cirkel med centrum i B og radius $|BC|$ konstrueres og C bestemmes som skæringen mellem halvlinjen og cirklen (her kan der være to skæringspunkter - det andet skæringspunkt er markeret med et lilla C).

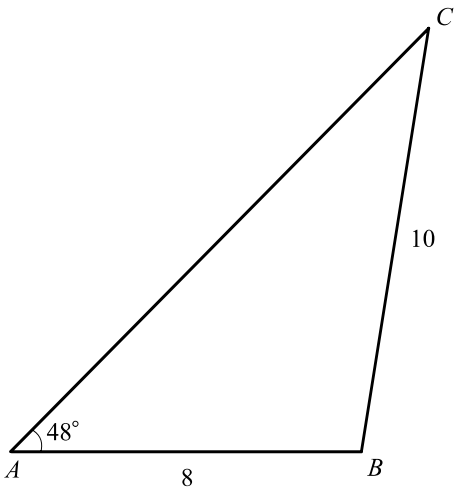
5. Til sidst konstrueres hele trekanten ud fra de tre punkter A, B og C.



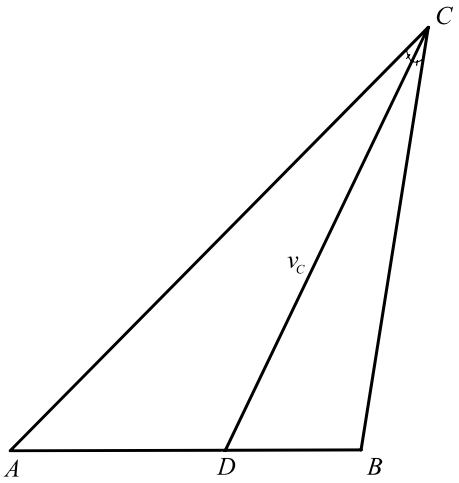
YouTube [Kort video om konstruktion af trekantstilfælde 5.]

YouTube [Konkret taleksempel med konstruktion af trekantstilfælde 5.]

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.14 (DELPRØVE 2)



Figur 1



Figur 2

Figur 1 viser trekant ABC, hvor $\angle A = 48°$, $|AB| = 8$ og $|BC| = 10$.

a) Konstruér en målfast tegning af trekant ABC, og forklar konkstruktionen.

Figur 2 viser igen trekant ABC, hvor vinkelhalveringslinjen v_C er tegnet.

Punktet D er skæringspunktet mellem v_C og siden AB.

b) Bestem længden af linjestykket BD.

a)

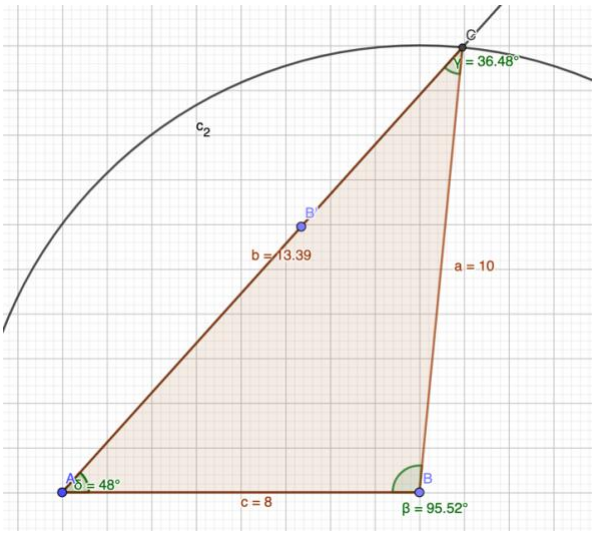
Jeg tegner først linjestykket fra A til B med længden 8 (Linjestykke med given længde).

Derefter laver jeg vinklen på 48° (Vinkel med given størrelse - mod uret) og tegner en halvlinje gennem A og hjælpepunktet B'.

Derefter tegner jeg en cirkel med centrum i B og radius 10 (Cirkel ud fra centrum og radius).

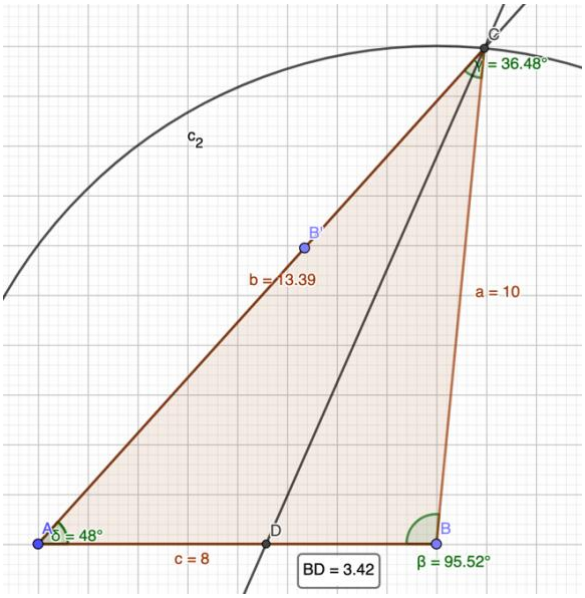
Dér hvor cirklen skærer halvlinjen danner jeg punkt C (Skæringsværktøj).

Jeg færdiggør trekanten ved hjælp af Polygon og sætter længder på alle siderne (Længde).



b)

Jeg tegner nu vinkelhalveringslinjen v_C (Vinkelhalveringslinje) og bestemmer skæringen mellem denne og siden AB (Skæringsværktøj). Derefter bestemmer jeg længden af linjestykket BD med Geogebra (Længde):



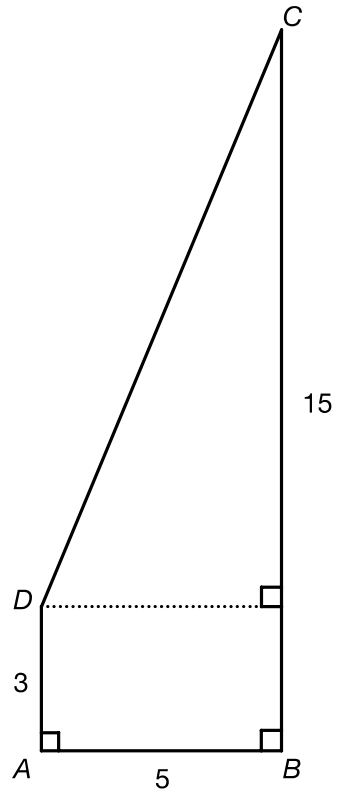
Altså er længden af linjestykket BD 3, 42.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

FIRKANTER

Vores viden om trekanter kan også bruges til at løse opgaver, hvor firkanter indgår.

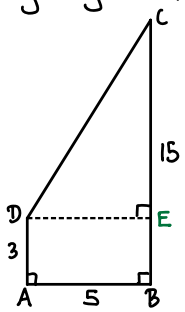
GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.15 (DELPRØVE 1)



Figuren viser firkanten $ABCD$. Nogle af firkantens oplysninger er angivet på figuren.

a) Bestem længden af siden CD.

a) Jeg tegner først en skitse af trekanten, hvor jeg har indsat et punkt E:



Jeg vil først bestemme længden af CE.

Der må gælde, at $|CE| = |CB| - |EB|$, og jeg ved, at $|CB| = 15$ og at $|EB| = |DA| = 3$

Derfor er $|CE| = 15 - 3 = 12$

Derudover ved jeg, at $|DE| = |AB| = 5$

Jeg kan nu bestemme længden af DC ved hjælp af Pythagoras Sætning, da trekant CED er retvinklet, og jeg kender længden af de to kateter:

$|CD|^2 = |CE|^2 + |DE|^2$

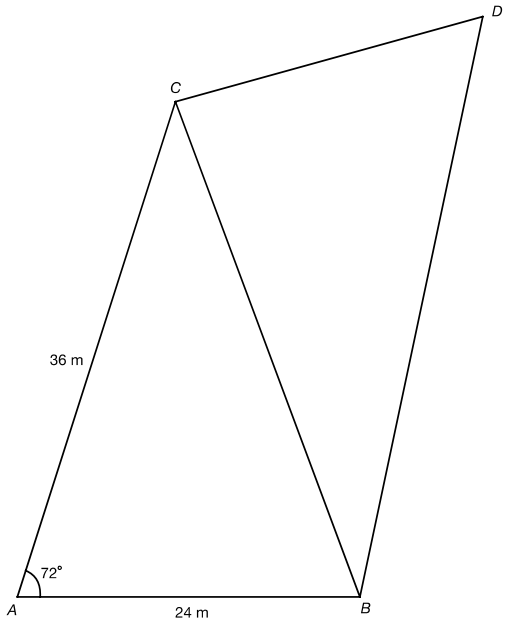
Jeg indsætter tallene og isolerer $|CB|$:

$$|CD|^2 = 12^2 + 5^2$$
$$|CD|^2 = 144 + 25$$
$$|CD|^2 = 169$$
$$|CD| = \sqrt{169}$$
$$|CD| = 13$$

Altså er længden af siden CD lig med 13.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

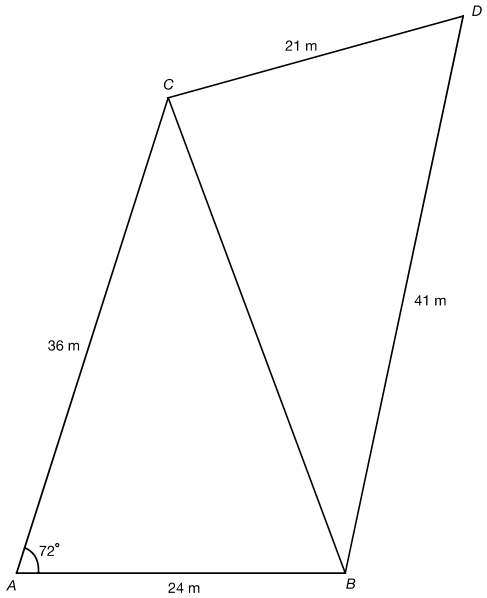
GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #2.16 (DELPRØVE 2)



Figur 1

Figur 1 viser en tegning af et firkantet græsareal $ABDC$ i en park. Nogle af målene fremgår af figuren.

a) Konstruér en målfast tegning af trekant ABC, og forklar konstruktionen.



Figur 2

Figur 2 viser igen en tegning af græsarealet $ABDC$ i parken, hvor alle sidelængderne er angivet.

b) Konstruér en målfast tegning af hele græsarealet $ABDC$, og bestem arealet med 4 decimaler.

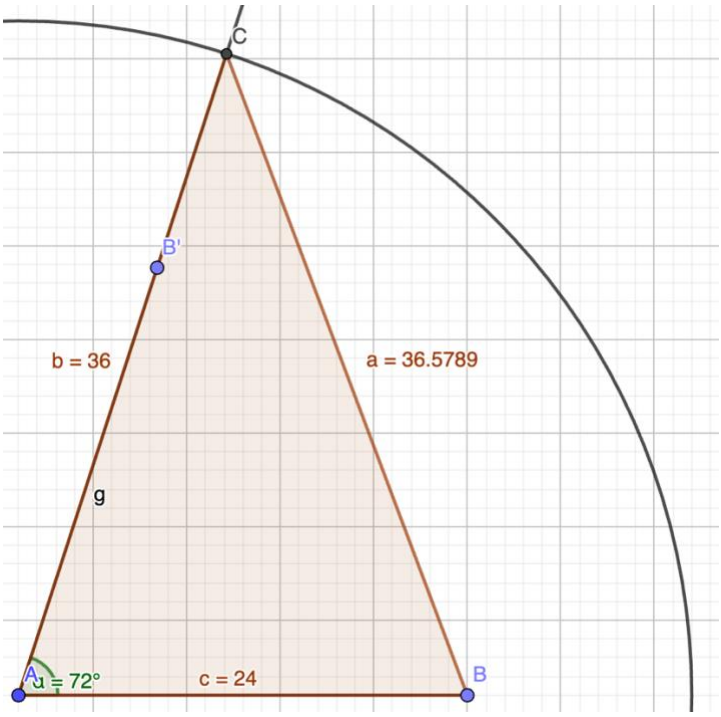
a)
Først danner jeg linjestykket AB med længden 24 (Linjestykke med given længde).

Derefter danner jeg vinklen A på 72° (Vinkel med given størrelse - mod uret).

Jeg laver nu en halvlinje gennem A og hjælpepunktet og danner derefter en cirkel med centrum i A og radius 36 (Cirkel ud fra centrum og radius).

Derefter danner jeg punktet C, som er skæringspunktet mellem halvlinjen og cirklen (Skæringsværktøj).

Jeg færdiggør trekanten ved hjælp af Polygon og sætter længder på alle siderne (Længde).



b)

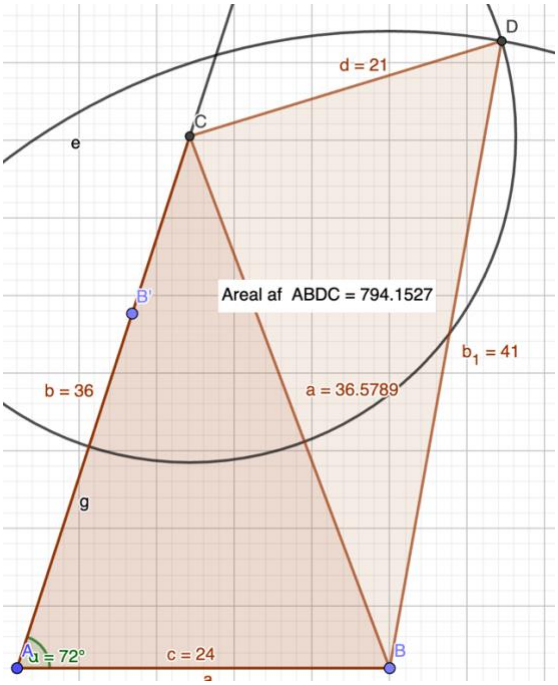
Da jeg ved, at afstanden fra C til D er 21, danner jeg en cirkel med centrum i C og radius 21 (Cirkel ud fra centrum og radius).

Da afstanden fra B til D er 41, danner jeg en cirkel med centrum i B og radius 41 (Cirkel ud fra centrum og radius).

Derefter danner jeg punktet D, som er skæringspunktet mellem de to cirkler (Skæringsværktøj).

Jeg færdiggør firkanten ved hjælp af Polygon og sætter længder på alle siderne (Længde).

Derefter bestemmer jeg arealet med fire decimaler (Areal).



Altså er arealet af parken 794, 1527 m².

YouTube [Kort gennemgang af opgaven.]