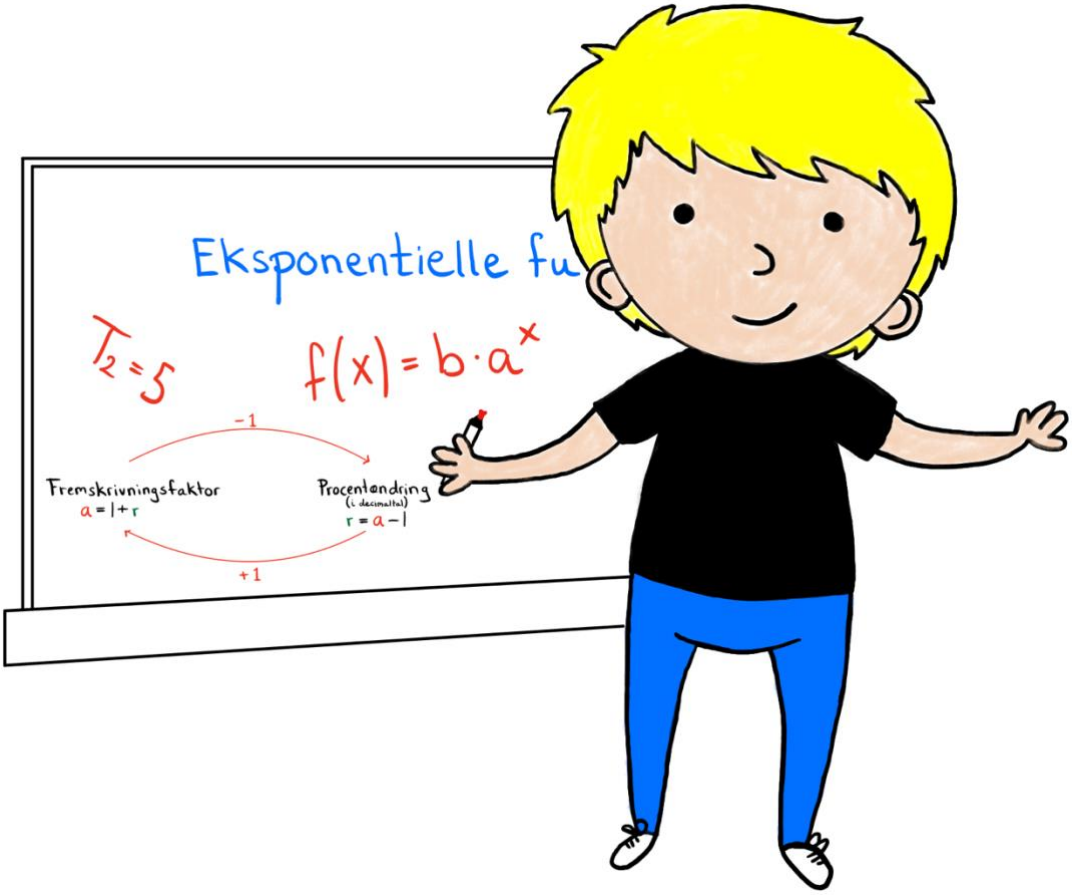
SCHACKS NOTER
KAPITEL 4 - EKSPONENTIELLE FUNKTIONER



Udarbejdet af Kristian Schack Blom, Århus Akademi

Fejlrettelser samt ris og ros bedes sendes til aaks@aarhusakademi.dk

Den nyeste version af noterne kan altid findes på www.matematikC.dk

Indholdsfortegnelse

FORSKRIFT OG GRAF 2
AT BESTEMME FUNKTIONSVÆRDIEN, NÅR X ER KENDT 5
AT BESTEMME X, NÅR FUNKTIONSVÆRDIEN ER KENDT 6
TABEL 7
AT BESTEMME A OG B UD FRA TO PUNKTER 9
VÆKSTEGENSKABEN 10
EKSPONENTIEL MODEL 11
OPSTILLING AF EKSPONENTIEL MODEL 17
FORDOBLINGSKONSTANT OG HALVERINGSKONSTANT 18
EKSPONENTIEL REGRESSION 25

FORSKRIFT OG GRAF

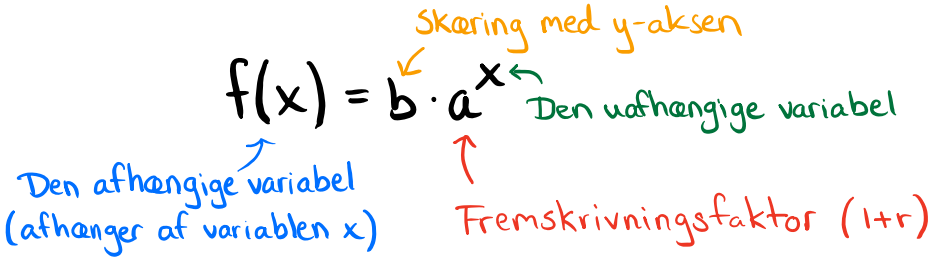
En eksponentiel funktion er en funktion på formen $f(x) = b \cdot a^x$.

$f(x)$ er den afhængige variabel.

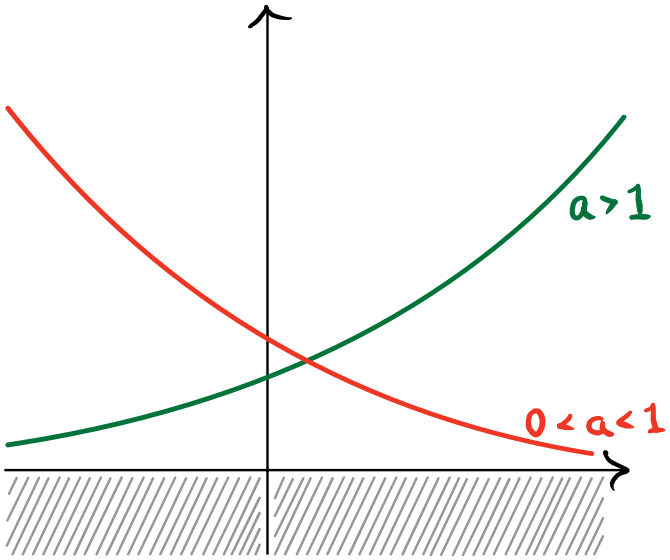
x er den uafhængige variabel.

a er en konstant og kaldes fremskrivningsfaktoren. a er større end 0 ($a > 0$)

b er en konstant og angiver grafens skæring med y-aksen - altså går grafen gennem punktet $(0, b)$.
b er større end 0 ($b > 0$).



Grafen for en eksponentiel funktion ser således ud:



Hvis a er større end 1 ($a > 1$), er funktionen **voksende**.

Hvis a er mindre end 1, men større end 0 ($0 < a < 1$), er funktionen **aftagende**.

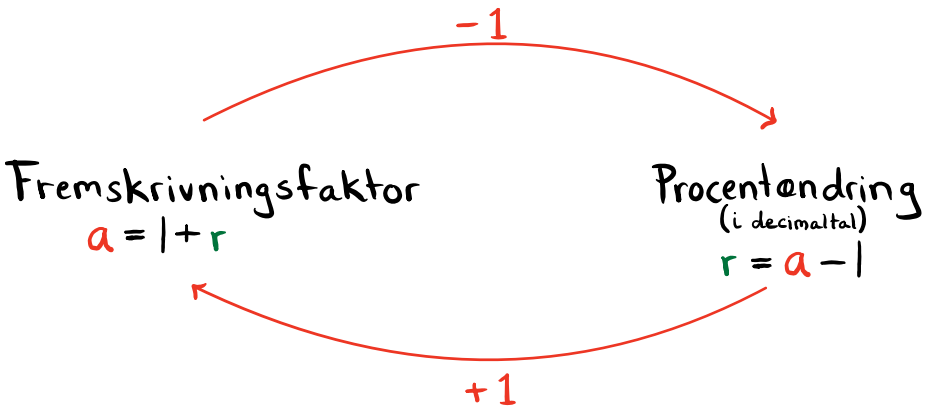
Læg mærke til, at grafen aldring rammer x-aksen. Grafen forløber altså aldrig under x-aksen.

YouTube Kort video om forskrift og graf for en eksponentiel funktion.

Sammenhængen mellem fremskrivningsfaktoren ***a*** og procentændringen ***r*** er:

Vi skal **altid lægge 1 til, når vi går fra procentændring til fremskrivningsfaktor** - også selvom procentændringen er negativ.

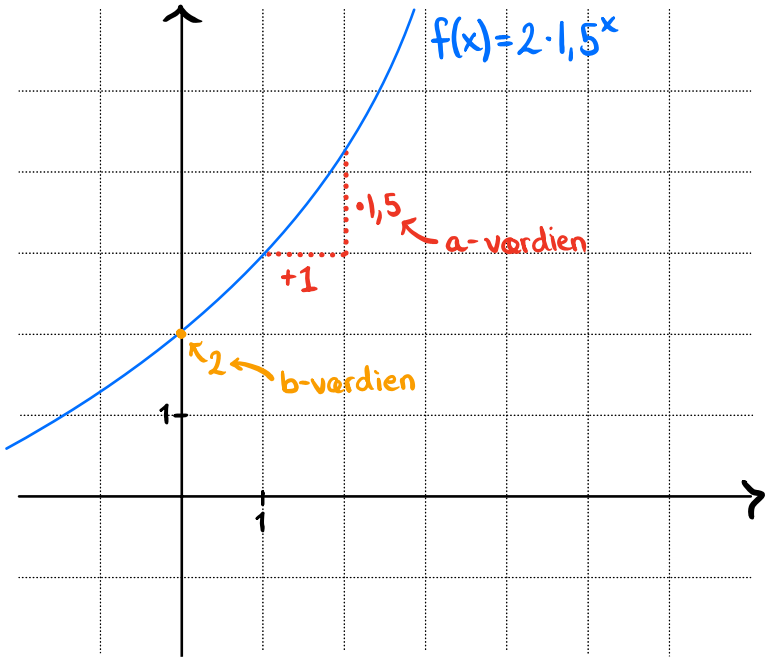
Omvendt skal vi **altid trække 1 fra, når vi går fra fremskrivningsfaktor til procentændring**:



YouTube Kort video om sammenhængen mellem fremskrivningsfaktor og procentændring.

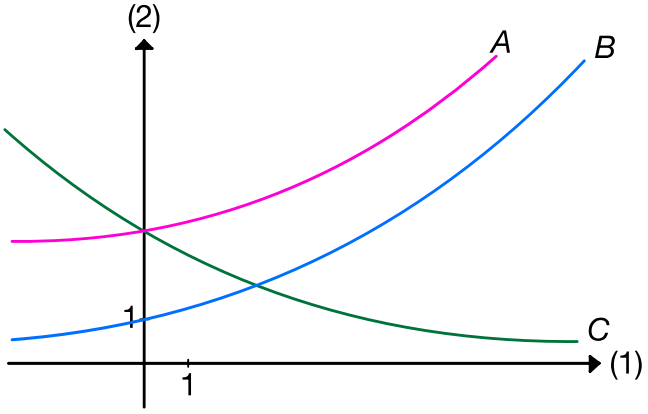
EKSEMPEL

Grafen for funktionen $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$ skærer y-aksen i punktet $(0,2)$, og fremskrivningsfaktoren er 1,5:



YouTube Kort gennemgang af eksemplet.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.1 (DELPRØVE 1)



En funktion f er givet ved $f(x) = 3 \cdot 1{,}05^x$.

En af de tre grafer på figuren ovenfor er graf for f.

a) Forklar, hvilken af de tre grafer på figuren der er graf for f, og forklar, hvorfor det ikke kan være de to andre.

a) Jeg kan se, at der er tale om en eksponentiel funktion, da f er på formen $f(x)=b\cdot a^x$.

b-værdien er grafens skæring med y-aksen, og da den i dette tilfælde er 3, kan grafen B ikke være graf for f, da B skærer y-aksen i 1.

Det kan dog stadigvæk være A eller C, da begge skærer y-aksen i 3.

Da fremskrivningsfaktoren a er 1,05, vil vores funktion være voksende.

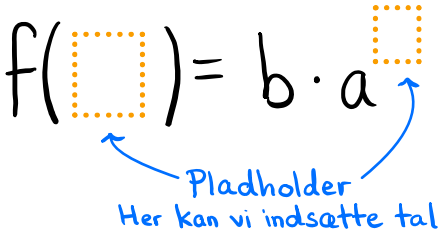
C er grafen for en aftagende funktion, og derfor er C ikke graf for f.

Tilbage er grafen A, der er graf for en voksende funktion og skærer y-aksen i 3, så A er graf for f.

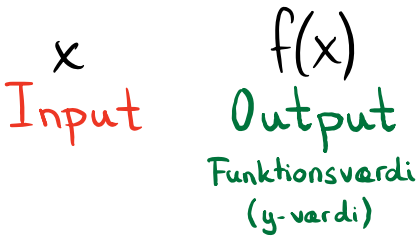
YouTube Kort gennemgang af opgaven.

AT BESTEMME FUNKTIONSVÆRDIEN, NÅR X ER KENDT

I en eksponentiel funktion er $f(x)$ og x variable, hvor $f(x)$ er den afhængige variabel, da den afhænger af værdien af variablen x. Som det var tilfældet ved de lineære funktioner, kan vi igen se x som en *pladsholder*, hvor vi kan sætte tal ind, og alt efter hvad vi sætter ind på x's plads, så ændres vores funktionsværdi.

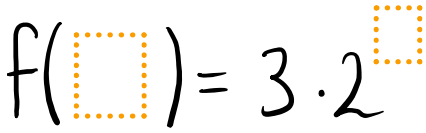


Hvis vi altså sætter et **input** ind på x's plads, så får vi et **output** $f(x)$, som er vores funktionsværdi eller y-værdi.

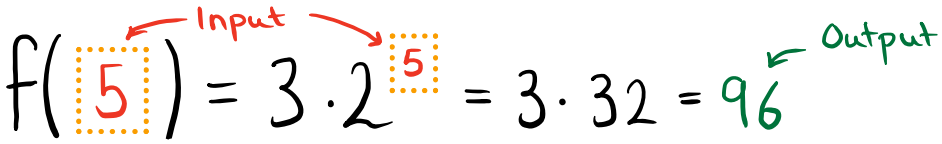


EKSEMPEL

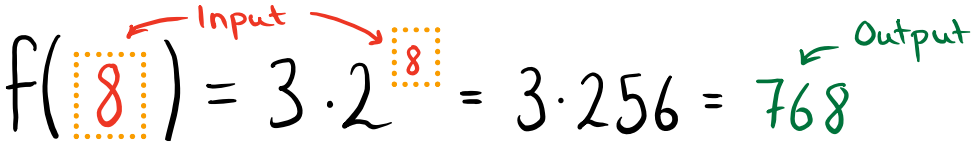
Vi ser på den eksponentielle funktion $f(x) = 3 \cdot 2^x$. Hvis vi ser på x som en pladsholder, kan det skrives således:



Vi prøver nu først at indsætte **5** på pladsholderen og udregner funktionsværdien $f(5)$. Altså er **5** vores **input**, og vi vil nu finde vores **output**:



Vi prøver nu først at indsætte **8** på pladsholderen og udregner funktionsværdien $f(8)$. Altså er **8** vores **input**, og vi vil nu finde vores **output**:



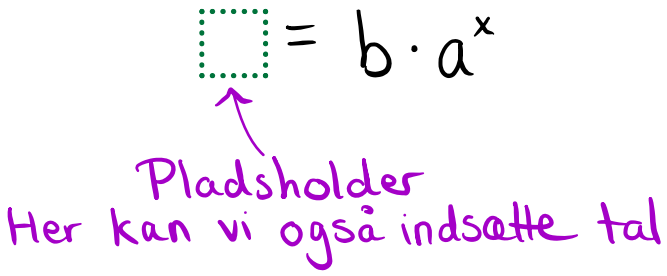
Med eksemplet kan vi tydeligt se, at funktionsværdien *afhænger* af, hvad vi indsætter på x's plads - *vores **output** afhænger af vores **input**.*

Hvis vi benytter **WordMat**, skal vi bare trykke på **Alt + B** for at beregne resultatet.

YouTube Kort video om at bestemme funktionsværdier.

AT BESTEMME X, NÅR FUNKTIONSVÆRDIEN ER KENDT

Vi kan også se den afhængige variabel $f(x)$ som en pladsholder:



Hvis vi indsætter et tal på $f(x)$'s plads, fremkommer der en ligning, som vi kan løse. Vi kan altså bestemme x-værdien, hvis vi kender funktionsværdien. Så hvis vi kender vores **output**, kan vi løse en ligning og finde vores **input**.

EKSEMPEL

Vi ser på den eksponentielle funktion $f(x) = 5 \cdot 3^x$. Hvis vi nu ser $f(x)$ som pladsholder, kan vi skrive det således:

$$\square = 5 \cdot 3^x$$

Vi vil nu prøve at løse ligningen $f(x) = 405$. Altså ved vi, at **405** er vores **output**. Vi indsætter derfor **405** på pladsholderen og isolerer derefter ***x*** i ligningen for at finde vores **input**:

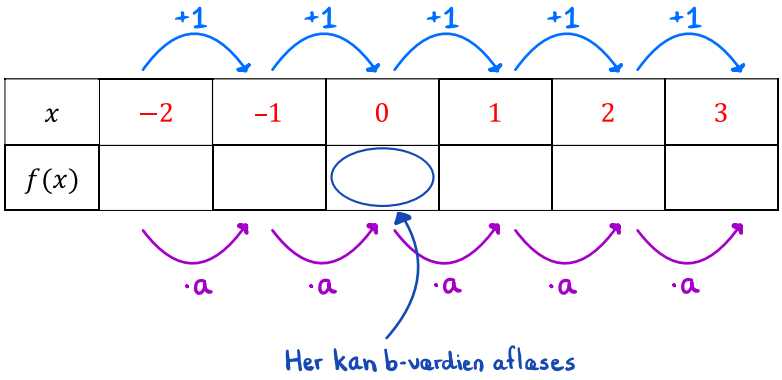
$$\begin{aligned}
405 &= 5 \cdot 3^x && \\
\frac{405}{5} &= 3^x && \text{Dividerer med 5 på begge sider} \\
\log\left(\frac{405}{5}\right) &= \log(3^x) && \text{Tager logaritmen på begge sider} \\
\log\left(\frac{405}{5}\right) &= x \cdot \log(3) && \text{Bruger logaritmeregneregel på højre side} \\
\frac{\log\left(\frac{405}{5}\right)}{\log(3)} &= x && \text{Dividerer med log(3) på begge sider} \\
4 &= x && \text{Udregner x-værdien}
\end{aligned}$$

Hvis vi benytter **WordMat**, skal vi bare trykke på **Alt + L** for at isolere x.

YouTube Kort video om at bestemme x-værdier.

TABEL

Som det er tilfældet ved en lineær funktion, kan en eksponentiel funktion også repræsenteres ved hjælp af en tabel. Tabellen viser et antal x-værdier med tilhørende funktionsværdier. Hvis vi gerne vil aflæse a- og b-værdien direkte ud fra tabellen, så er det muligt i visse tilfælde: Hvis x-værdierne vokser med 1, kan vi aflæse a-værdien, og hvis x har værdien 0 i tabellen, kan vi aflæse b-værdien (da b-værdien er y-værdien, når $x = 0$).



EKSEMPEL

Vi ser på den eksponentielle funktion $f(x) = 3 \cdot 2^x$ og skal udfylde følgende tabel:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

Vi vil nu finde de seks funktionsværdier (**outputs**) ved at indsætte henholdsvis $\mathbf{-2}$, $\mathbf{-1}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ og $\mathbf{3}$ på $\boldsymbol{x}$'s plads (**inputs**) i forskriften:

$$f(\mathbf{-2}) = 3 \cdot 2^{\mathbf{-2}} = \mathbf{0,75}$$

$$f(\mathbf{-1}) = 3 \cdot 2^{\mathbf{-1}} = \mathbf{1,5}$$

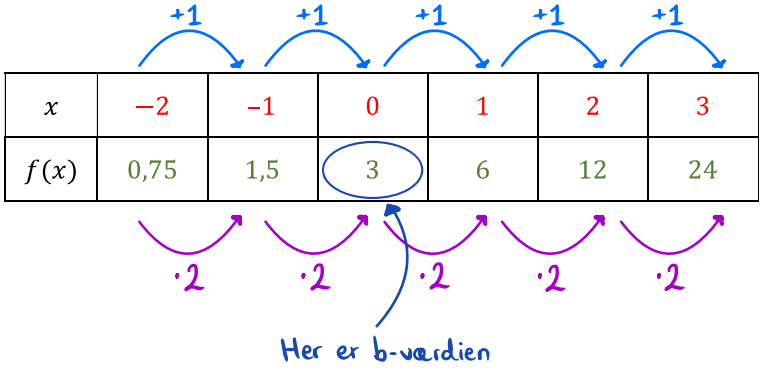
$$f(\mathbf{0}) = 3 \cdot 2^{\mathbf{0}} = \mathbf{3}$$

$$f(\mathbf{1}) = 3 \cdot 2^{\mathbf{1}} = \mathbf{6}$$

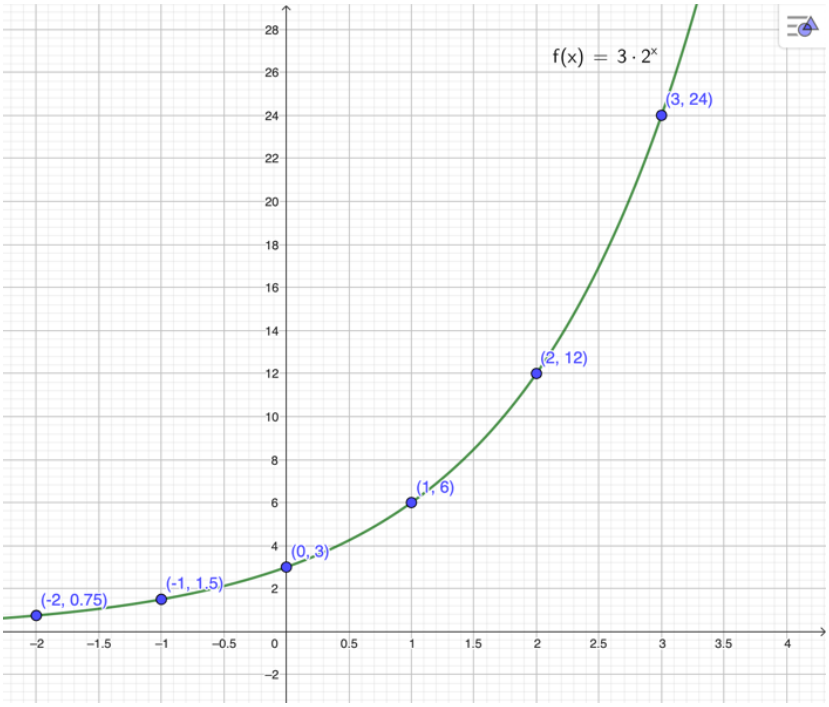
$$f(\mathbf{2}) = 3 \cdot 2^{\mathbf{2}} = \mathbf{12}$$

$$f(\mathbf{3}) = 3 \cdot 2^{\mathbf{3}} = \mathbf{24}$$

Tabellen kommer derfor til at se således ud:



Hvis vi gerne vil plotte tallene ind i et koordinatsystem og derefter tegne grafen for funktionen, så giver tabellen punkterne $(-2; 0,75)$, $(-1; 1,5)$, $(0, 3)$, $(1, 6)$, $(2, 12)$ og $(3, 24)$. Læg mærke til, at vi har brugt semikolon ved de to første punkter til at adskille x- og y-værdierne, da y-værdierne er decimaltal. Vi plotter nu punkterne ind i et koordinatsystem:

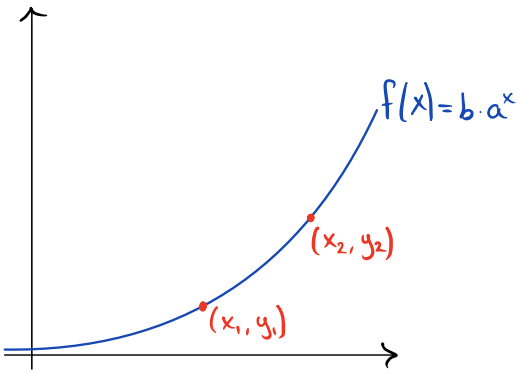


YouTube Kort video om at udfylde tabeller og plotte punkterne ind i et koordinatsystem.

AT BESTEMME A OG B UD FRA TO PUNKTER

Hvis vi kender 2 punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2), som ligger på grafen for en eksponentiel funktion, kan vi bestemme a og b ved at bruge følgende formler:

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \text{ og } b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$



EKSEMPEL

Punkterne (3,32) og (6,256) ligger på grafen for en eksponentiel funktion. Vi vil nu bestemme a og b.

Da vi nu ved, at $(x_1, y_1) = (3,32)$ og $(x_2, y_2) = (6,256)$, har vi fået oplyst, at $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $y_1 = 32$ og $y_2 = 256$.

Vi sætter tallene ind i formlen for a:

$$a = \sqrt[6-3]{\frac{256}{32}} = 2$$

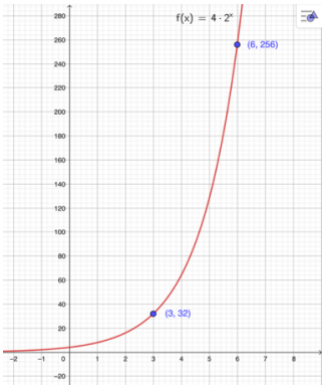
Vi vil derefter bestemme b ved at indsætte det første punkts koordinater i formlen for b:

$$b = \frac{32}{2^3} = 4$$

Dermed er forskriften for den eksponentielle funktion givet ved $\boldsymbol{f(x) = 4 \cdot 2^x}$.

Altså har funktionen en fremskrivningsfaktor på 2, og grafen skærer y-aksen i punktet (0,4)

Hvis vi tegner grafen i Geogebra, kan vi netop se, at grafen går gennem punkterne (3,32) og (6,256):



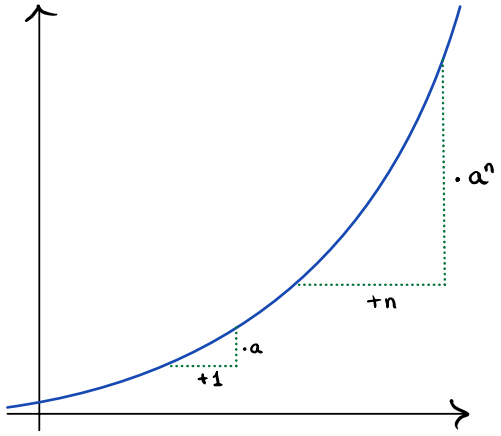
YouTube Kort video om bestemmelse af a og b ud fra to punkter samt eksemplet.

VÆKSTEGENSKABEN

For en eksponentiel funktion er der tale om **konstant procentvækst.** Hvis x vokser med en konstant værdi, så vokser eller aftager funktionsværdien med en konstant procentdel. Vi har tidligere set, at når vi skal lægge procenter til en størrelse eller trække procenter fra en størrelse, så skal vi gange med en fremskrivningsfaktor, og det er netop dét, der sker. Der gælder således følgende:

1) Når x vokser med 1, ganges funktionsværdien med a.

2) Når x vokser med et tal n, ganges funktionsværdien med a^n



EKSEMPEL

For den *voksende* eksponentielle funktion $f(x) = 2 \cdot 1{,}12^x$ gælder der følgende:

1) Når x vokser med 1, ganges funktionsværdien med 1,12.
   Altså vokser funktionsværdien med 12%, da $r = a - 1 = 1{,}12 - 1 = 0{,}12 = 12\%$.
2) Når x vokser med 4, ganges funktionsværdien med $1{,}12^4 \approx 1{,}5735$.
   Altså vokser funktionsværdien med 57,35%, da $r = a - 1 = 1{,}5735 - 1 = 0{,}5735 = 57{,}35\%$.

EKSEMPEL

For den *aftagende* eksponentielle funktion $f(x) = 6 \cdot 0{,}9^x$ gælder der følgende:

3) Når x vokser med 1, ganges funktionsværdien med 0,9.
   Altså aftager funktionsværdien med 10%, da $r = a - 1 = 0{,}9 - 1 = -0{,}10 = -10\%$.
4) Når x vokser med 4, ganges funktionsværdien med $0{,}9^4 = 0{,}6561$.
   Altså aftager funktionsværdien med 34,39%, da $r = a - 1 = 0{,}6561 - 1 = -0{,}3439 = -34{,}39\%$.

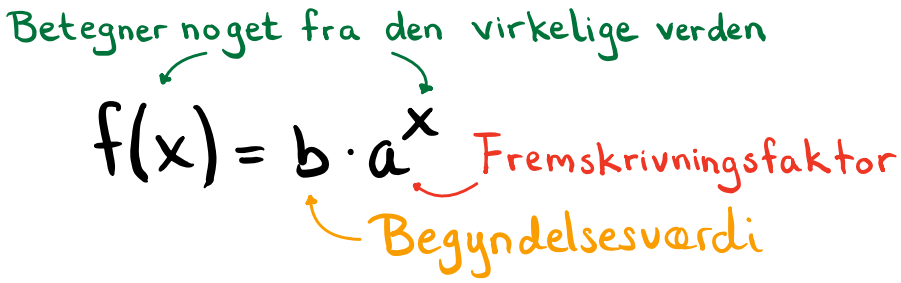
YouTube Kort video om vækstegenskaben samt eksemplerne.

EKSPONENTIEL MODEL

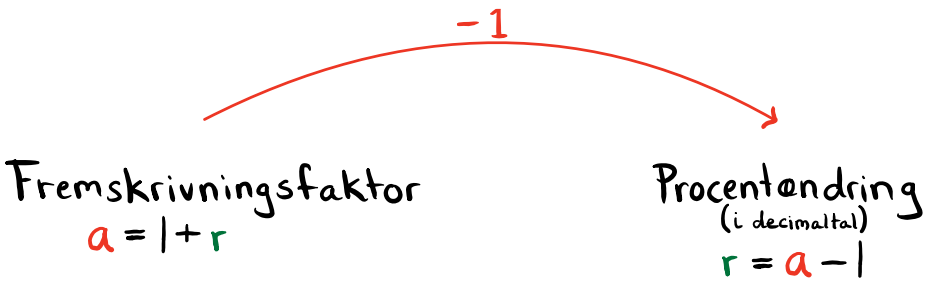
Hvis vi i den virkelige verden ser eksempler på konstant procentvækst, kan vi beskrive disse ved hjælp af en eksponentiel model. **En eksponentiel model er en eksponentiel funktion, der beskriver en situation fra virkeligheden.**

Når vi beskriver en situation fra virkeligheden, er det vigtigt at vide, hvad det helt præcist er, vi beskriver. **Derfor skal vi angive, hvad vores variable betegner.** Det er angivet med grønt i de to eksempler neden for.

I de eksponentielle modeller gælder der oftest, at $x \geq 0$ - altså kan x-værdierne ikke være negative. Det betyder, at vores b-værdi nu er vores **begyndelsesværdi**.



Når vi får oplyst en fremskrivningsfaktor i vores model og skal bestemme, hvor stor procentændringen er, så skal vi altid trække 1 fra fremskrivningsfaktoren:



Hvis vores x-værdi angiver et antal år efter et bestemt årstal, så skal vi være opmærksomme, når vi arbejder med modellen. Hvis vi i første eksempel neden for f.eks. skal bestemme forbruget af kakaomælk i 2023, skal vi indsætte 10 på x's plads, da 2023 jo er 10 år efter år 2013.

EKSEMPEL

Forbruget af kakaomælk i Danmark kan beskrives med modellen $f(x) = 54 \cdot 1,16^x$, hvor $f(x)$ er det årlige forbrug af kakaomælk, målt i mio. liter, og x er antal år efter 2013.

Tallet $1,16$ er vores fremskrivningsfaktor a og fortæller, at forbruget af kakaomælk vokser med 16% om året, da $r = a - 1 = 1,16 - 1 = 0,16 = 16\%$.

Tallet 54 er vores begyndelsesværdi b og fortæller, at forbruget af kakaomælk var 54 mio. liter i år 2013.

EKSEMPEL

Mængden af amfetamin i kroppen kan beskrives ved modellen $f(x) = 15 \cdot 0,84^x$, hvor $f(x)$ er amfetaminmængden, målt i mg, og x er tiden efter indtagelsen, målt i timer.

Tallet $0,84$ er vores fremskrivningsfaktor a og fortæller, at amfetaminmængden i kroppen falder med 16% i timen, da $r = a - 1 = 0,84 - 1 = -0,16 = -16\%$.

Tallet 15 er vores begyndelsesværdi b og fortæller, at amfetaminmængden i kroppen var 15 mg. ved indtagelsen af stoffet.

YouTube Kort gennemgang af eksponentielle modeller samt eksemplerne.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.2 (DELPRØVE 1)

I en model beskrives antallet af pandaer i Kina i årene efter 2020 ved sammenhængen

$$f(x) = 1000 \cdot 1,023^x \ ,$$

hvor $f(x)$ er antallet af pandaer i Kina x år efter 2020.

a) Hvad fortæller tallene 1000 og 1,023 om udviklingen i antallet af pandaer i Kina?

a) Der er tale om en eksponentiel model $f(x) = 1000 \cdot 1,023^x$, hvor $f(x)$ er antallet af pandaer i Kina x år efter 2020.

1000 er vores begyndelsesværdi b og fortæller, at antallet af pandaer i Kina er 1000 i år 2020.

1,023 er vores fremskrivningsfaktor a og fortæller, at antallet af pandaer vokser med 2,3% om året, da $r = 1,023 - 1 = 0,023 = 2,3\%$.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.3 (DELPRØVE 1)

En person har indtaget det psykedeliske stof LSD. Mængden af LSD i kroppen kan beskrives ved modellen $f(x) = 120 \cdot 0{,}79^x$, hvor x er tiden efter indtagelsen (målt i timer), og $f(x)$ er mængden af LSD i kroppen (målt i mikrogram).

a) Hvad fortæller tallene 120 og 0,79 om mængden af LSD i kroppen?

a) Der er tale om en eksponentiel funktion $f(x) = 120 \cdot 0{,}79^x$, hvor $f(x)$ er mængden af LSD i kroppen, målt i mikrogram og x er tiden efter indtagelsen, målt i timer.

120 er vores begyndelsesværdi b og fortæller, at personen har indtaget 120 mikrogram LSD. 0,79 er vores fremskrivningsfaktor a og fortæller, at mængden af LSD i kroppen aftager med 21 % i timen, da $r = 0{,}79 - 1 = -0{,}21 = -21\,\%$.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.4 (DELPRØVE 2)

Under coronaepidemien kan antallet af smittede beskrives ved modellen

$$f(x) = 6{,}0 \cdot 1{,}06^x \ ,$$

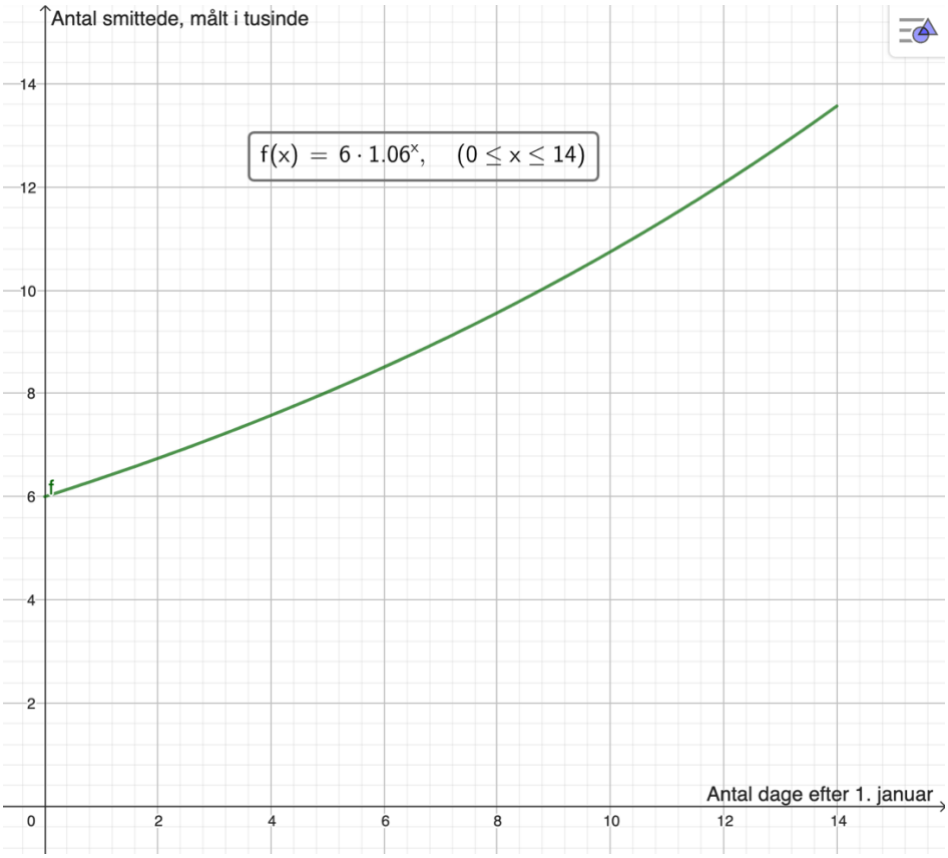
hvor $f(x)$ er antallet af smittede, målt i tusinde, og x er antal dage efter 1. januar.

a) Tegn grafen for f for de første 14 dage i januar.

b) Hvad fortæller tallet 6,0 om antallet af smittede?

c) Vokser antallet af smittede ifølge modellen med det samme antal personer hver dag? Begrund dit svar.

a)
Jeg tegner grafen for f i Geogebra:



b)
Tallet 6,0 er vores begyndelsesværdi b og fortæller, at antallet af smittede var 6 tusinde den 1. januar.

c)
Jeg skal argumentere for, hvorvidt antallet af smittede ifølge modellen vokser med det samme antal personer hver dag. **Da $f(x) = 6{,}0 \cdot 1{,}06^x$ er en eksponentiel model, vokser antallet af smittede med en fast procentdel, og dermed vokser antallet ikke med det samme antal personer hver dag, hvilket også ses tydeligt på grafen, da denne ikke er en ret linje.**

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.5 (DELPRØVE 2)

I en model beskrives udviklingen i befolkningstallet i Nigeria ved funktionen

$$f(x) = 206 \cdot 1{,}024^x \ ,$$

hvor $f(x)$ er befolkningstallet, målt i millioner, x år efter 2021.

a) Forklar hvad tallene 206 og 1,024 fortæller om befolkningstallet i Nigeria.

I USA kan udviklingen i befolkningstallet beskrives ved funktionen

$$g(x) = 331 \cdot 1{,}001^x \ ,$$

hvor $g(x)$ er landets befolkningstal, målt i millioner, x år efter 2021.

b) Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem.

c) I hvilket årstal bliver befolkningstallene i de to lande lige store, hvis udviklingen fortsætter?

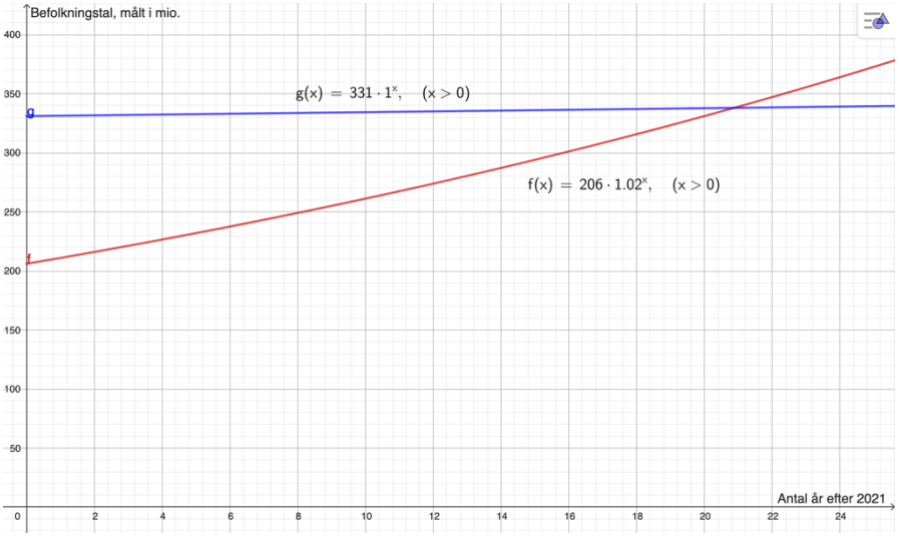
a)

Tallet 206 er vores begyndelsesværdi b og fortæller, at befolkningstallet i Nigeria var på 206 millioner i år 2021.

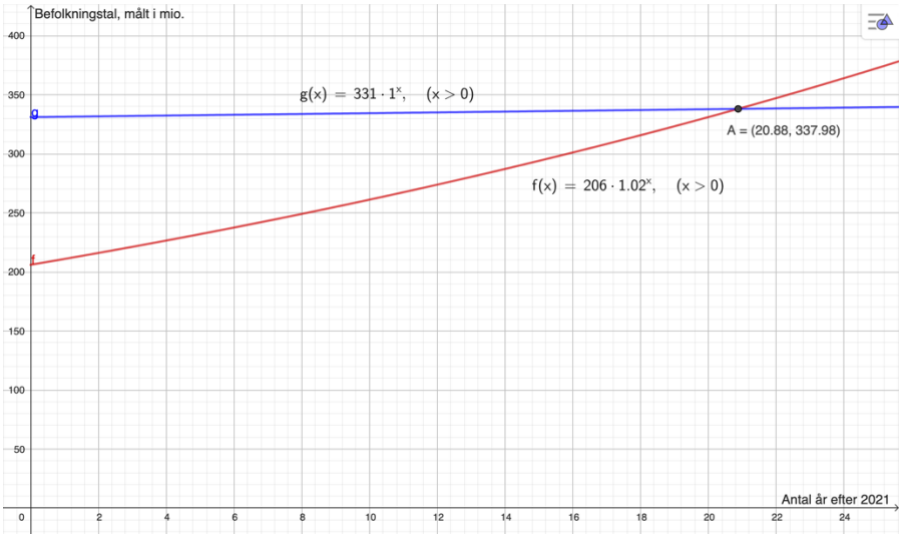
Tallet $1,024$ er vores fremskrivningsfaktor a og fortæller, at befolkningstallet i Nigeria vokser med $2,4\%$ om året, da $r = a - 1 = 1,024 - 1 = 0,024 = 2,4\%$.

b)

Jeg tegner graferne for f og g i samme koordinatsystem:



c)
Jeg skal finde frem til, hvornår befolkningstallet i de to lande er lige store, hvis udviklingen fortsætter. Jeg gør jeg ved at bestemme skæringspunktet mellem de to grafer:



Skæringspunktet har x-værdien 20, 88, og da x er antal år efter 2021, vil befolkningstallene være lige store i 2041, hvis udviklingen fortsætter.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

OPSTILLING AF EKSPONENTIEL MODEL

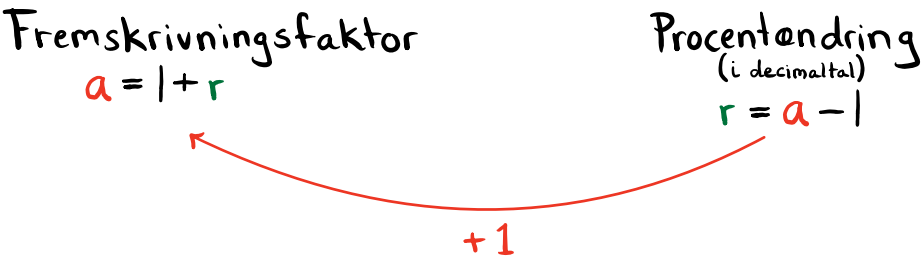
Vi har set flere eksempler, hvor vi har skulle fortolke konstanterne a og b i en eksponentiel model. Vi kan også komme ud for, at vi selv skal opstille en eksponentiel model ud fra oplysninger.

Vi ved, at **vores model er eksponentiel, hvis der er tale om en konstant procentvækst.**

Hvis det ikke fremgår af opgaveformuleringen, skal vi selv indføre passende variable - med dette menes der, at **vi skal fortælle, hvad de to variable x og $f(x)$ står for.**

Derudover skal vi ud fra teksten **finde frem til, hvad vores fremskrivningsfaktor a og begyndelsesværdi b er**.

For at bestemme vores fremskrivningsfaktor a skal vi kende vores procentændring r, så den fremgår altid af teksten. Derefter bruger vi formlen $a = 1 + r$ til at bestemme fremskrivningsfaktoren.



YouTube Kort gennemgang af opstilling af eksponentielle modeller.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.6 (DELPRØVE 1)

Omsætningen i Lego steg fra 2021 til 2022 med 17 %.

I 2022 var Legos omsætning 64,4 mia. kr.

a) Opstil en model til at bestemme Legos omsætning i årene efter 2022, hvis udviklingen fortsætter.

a) Jeg lader $f(x)$ betegne Legos omsætning, målt i mia. kr., og x betegne antal år efter 2022.

Da Legos omsætning vokser med en fast procentdel, er der tale om en eksponentiel model $f(x) = b \cdot a^x$.

b er vores begyndelsesværdi, og da vi får oplyst, at Legos omsætning var 64,4 mia. kr. i 2022 er $b = 64{,}4$.

Da Legos omsætning vokser med 17% pr. år, hvis udviklingen fortsætter, er

$a = 1 + r = 1 + 0{,}17 = 1{,}17$.

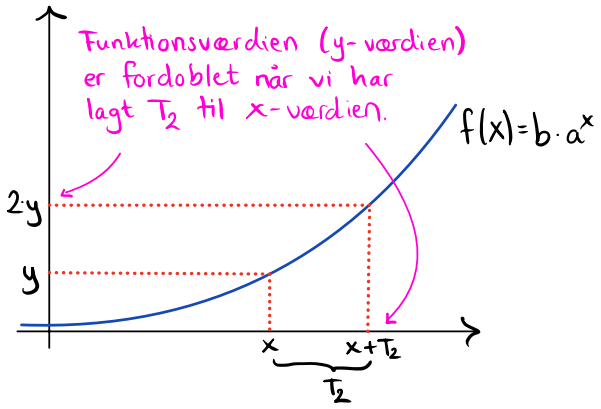
Altså er modellen $f(x) = 64{,}4 \cdot 1{,}17^x$.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

FORDOBLINGSKONSTANT OG HALVERINGSKONSTANT

For en eksponentielt **voksende** funktion kan vi finde frem til, **hvad x skal vokse med, for at vores funktionsværdi bliver fordoblet. Dette tal kaldes vores fordoblingskonstant** - og det er netop en konstant, for hver eneste gang, at x vokser med vores fordoblingskonstant, så bliver vores funktionsværdi fordoblet.

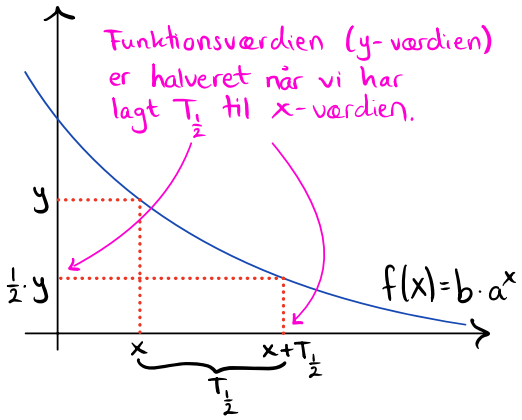
Det kan illustreres således:



Vi kan bestemme fordoblingskonstanten med følgende formel:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

For en eksponentielt **aftagende** funktion kan vi bestemme en **halveringskonstant** - altså finde frem til, **hvad x skal vokse med, for at vores funktionsværdi bliver halveret:**



Vi kan for en eksponentielt **aftagende** funktioner bestemme halveringskonstanten med følgende formel:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}$$

YouTube [Kort gennemgang af fordoblingskonstant og halveringskonstant.]

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.7 (DELPRØVE 1)

Om en eksponentielt voksende funktion f oplyses, at fordoblingskonstanten er 4.

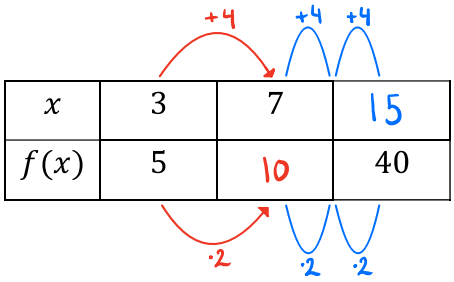
a) Udfyld et skema som nedenstående. Begrund dine svar. Brug bilaget.

Bilag vedlagt

x	3	7	
$f(x)$	5		40

a) Vi får oplyst, at fordoblingskonstanten er 4, hvilket betyder, at vores funktionsværdi bliver fordoblet, hver gang x vokser med 4. Da x netop vokser med 4 (fra 3 til 7), må funktionsværdien fordobles fra 5 til 10 (se bilag).

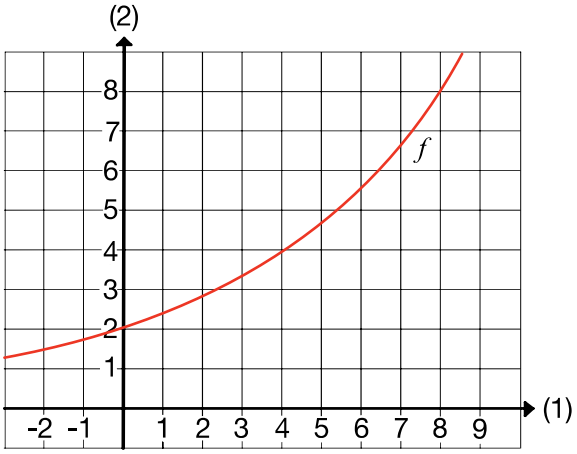
For at bestemme den sidste x-værdi, kan jeg se, at funktionsværdien er blevet fordoblet to gange (fra 10 til 20 til 40). Derfor må x-værdien være vokset med 4 to gange, så den sidste x-værdi er $7+4+4=15$ (se bilag).



YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.8 (DELPRØVE 1)

Bilag vedlagt



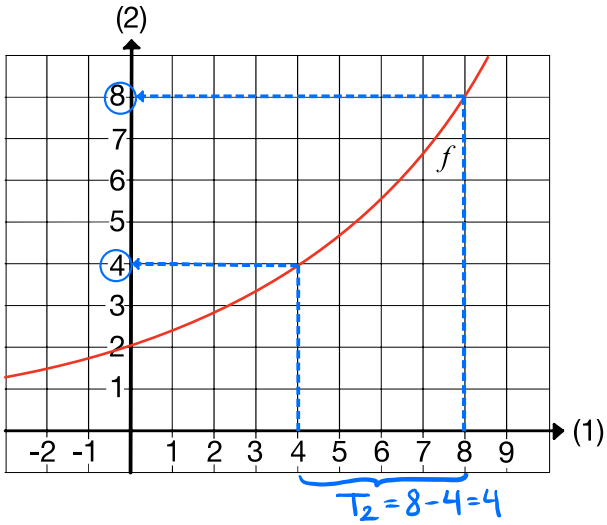
Figuren viser grafen for en eksponentielt voksende funktion f.

a) Bestem $f(4)$ ved hjælp af grafen. Brug bilaget.

b) Bestem fordoblingskonstanten T_2 ved hjælp af grafen. Brug bilaget.

a) Jeg bestemmer f(4) ved hjælp af grafen på bilaget, hvor jeg finder 4 på x-aksen, går op til jeg rammer grafen og aflæser funktionsværdien. Dermed er f(4) = 4 (se bilag).

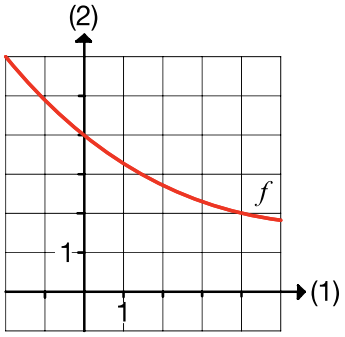
b) Jeg finder ud af, hvad x skal vokse med, for at funktionsværdien bliver fordoblet fra 4 til 8. Jeg aflæser, at den nye x-værdi er 8 (se bilag). Så fordoblingskonstanten $T_2 = 8 - 4 = 4$.



YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.9 (DELPRØVE 1)

Bilag vedlagt



Figuren viser grafen for en eksponentielt aftagende funktion f bestemt ved

$$f(x) = b \cdot a^x .$$

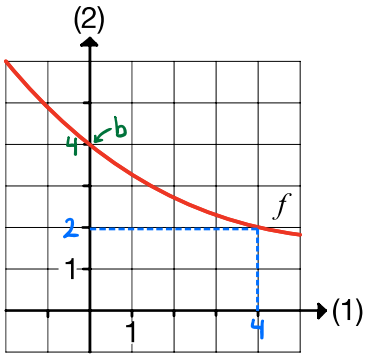
a) Afgør for hver af følgende påstande, om påstanden er korrekt eller forkert. Begrund dine svar. Benyt bilaget som en del af begrundelsen.

Påstand 1: $b = 4$.

Påstand 2: Halveringskonstanten for f er lig med 3.

a) Påstand 1 er korrekt, for som det ses på bilaget, så skærer grafen for f y-aksen i punktet (0,4), så b=4.

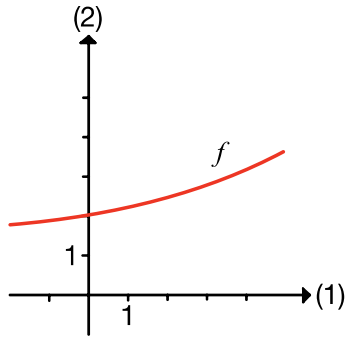
b) Påstand 2 er forkert, for som det ses, så vokser x med 4, når funktionsværdien er halveret fra 4 til 2. Altså er halveringskonstanten for f lig med 4 og ikke 3.



YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.10 (DELPRØVE 1)

Bilag vedlagt



Figuren viser grafen for en eksponentielt voksende funktion f.

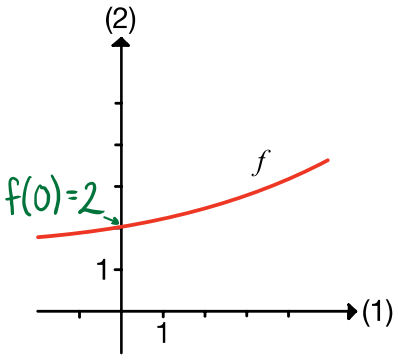
a) Bestem $f(0)$ ved aflæsning.

Det oplyses, at f har fordoblingskonstanten $T_2 = 6$.

b) Bestem $f(6)$.

a) Jeg aflæser f(0) på bilaget. Funktionsværdien f(0) = 2.

b) Jeg får oplyst, at fordoblingskonstanten $T_2 = 6$. Da f(0) = 2, må f(6) være det dobbelte af f(0), så f(6) = 4.



YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.11 (DELPRØVE 1)

I år 2024 var der 28700 ansatte i den danske afdeling af medicinalfirmaet Novo Nordisk.
Antallet af ansatte stiger med 25,2% om året.
Udviklingen i antallet af ansatte kan beskrives ved en eksponentiel model

$$f(x) = b \cdot a^x \quad ,$$

hvor $f(x)$ er antallet af ansatte i den danske afdeling af Novo Nordisk x antal år efter 2024.

a) Bestem tallene a og b. Begrund dine svar.

Fordoblingskonstanten for den eksponentielle model er $T_2 = 3$.

b) Hvad fortæller dette tal om udviklingen i antallet af ansatte i den danske afdeling af Novo Nordisk?

a) a er fremskrivningsfaktoren, og da det bliver oplyst, at antallet af ansatte stiger med 25,2% om året, er a = 1,252.

Da b er begyndelsesværdien, og det bliver oplyst, at der i 2024 var 28700 ansatte i den danske afdeling af Novo Nordisk, er b = 28700.

b) At fordoblingskonstanten for den eksponentielle model er T_2 = 3, fortæller, at antallet af ansatte i den danske afdeling af Novo Nordisk fordobles hver gang, der går 3 år.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.12 (DELPRØVE 2)

Mængden af vanddamp, som luft kan indeholde, afhænger af temperaturen.

Sammenhængen kan beskrives ved modellen

$$f(x) = 4{,}96 \cdot 1{,}07^x \ ,$$

hvor $f(x)$ er den mængde vanddamp, som luft kan indeholde, målt i g/m^3, og x er temperaturen i °C.

a) Bestem den mængde vanddamp, som luft kan indeholde ifølge modellen, når temperaturen er 18°C.

b) Bestem temperaturen, når mængden af vanddamp, som luft kan indeholde, er 10 g/m^3.

c) Bestem fordoblingskonstanten for f.

a)
Jeg skal bestemme mængden af vanddamp, som luft kan indeholde ifølge modellen, når temperaturen er 18°C, så jeg indsætter 18 på x's plads i modellen og bestemmer $f(18)$:

$$f(18) = 4{,}96 \cdot 1{,}07^{18} \approx 16{,}76446$$

Altså er mængden af vanddamp, som luft kan indeholde, $16{,}8$ g/m^3, når temperaturen er 18 °C.

b)
Jeg skal bestemme temperaturen, når mængden af vanddamp, som luft kan indeholde, er 10 g/m^3. Jeg indsætter derfor 10 på $f(x)$'s plads og isolerer x:

$$\Updownarrow \qquad 4{,}96 \cdot 1{,}07^x = 10$$

Ligningen løses for x vha. WordMat.

$$x = 10{,}36348$$

Temperaturen er dermed $10{,}4$°C, når mængden af vanddamp, som luft kan indeholde, er 10 g/m^3.

c)
Jeg skal bestemme fordoblingskonstanten for f, hvilket jeg gør med formlen $T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$.
Jeg indsætter den kendte a-værdi og bestemmer fordoblingskonstanten:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1{,}07)} \approx 10{,}24477$$

Altså er fordoblingskonstanten $10{,}2$ °C.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

EKSPONENTIEL REGRESSION

Hvis vi har *mere* end to punkter og bliver bedt om at opstille en eksponentiel model, skal vi lave **eksponentiel regression.**

Som i tilfældet med lineær regression benytter vi WordMat, WordMats Exceldokument eller Geogebra til at lave den eksponentielle regression (i Geogebra kaldes denne regression for "Vækst").

YouTube Kort video om eksponentiel regression i WordMat, WordMats Exceldokument og Geogebra.

Nogle gange vil datapunkterne være i en vedhæftet fil, hvormed vi skal importere data fra filen til WordMat eller Geogebra.

YouTube Kort video om import af data fra bilag til WordMat, WordMats Exceldokument og Geogebra.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.13 (DELPRØVE 2)

I et forsøg afkøles vand efter at være opvarmet til 100°C.

Tabellen viser udviklingen i temperaturen af vandet efter forsøgets start.

Antal minutter	0	10	30	50	60
Temperatur (°C)	100	83	58	42	35

I en model kan temperaturen af vandet beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot a^x \ ,$$

hvor $f(x)$ er temperaturen, målt i °C, og x er antal minutter efter forsøgets start.

a) Bestem konstanterne a og b ved eksponentiel regression.

b) Hvor mange minutter går der ifølge modellen, før temperaturen er halveret?

a)
Jeg bestemmer først konstanterne a og b ved eksponentiel regression:

x	**y**
0	100
10	83
30	58
50	42
60	35

Eksponentiel regression udført vha. WordMat: R2 = 0,999478681

$$y = 99{,}09585 \cdot 0{,}982797^x$$

Altså er $a = 0,982797$ og $b = 99,09585$.

b)
Jeg skal bestemme, hvor mange minutter der går, før temperaturen er halveret, hvilket jeg gør med formlen for halveringskonstanten: $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}$.
Jeg indsætter a-værdien fra delopgave a og bestemmer halveringskonstanten:

$$T_2 = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0{,}982797)} \approx 39{,}94465$$

Altså går der ca. 40 minutter, før temperaturen er halveret.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

GENNEMGANG AF EKSAMENSLIGNENDE OPGAVE #4.14 (DELPRØVE 2)

Tabellen viser indbyggertal i Angola i perioden 1960 til 2020.

Antal år efter 1960	0	10	…	55	60
Indbyggertal (mio.)	5	7	…	28	33

Alle tabellens 11 datapunkter findes i det vedhæftede bilag.

I en model beskrives udviklingen ved en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot a^x \ ,$$

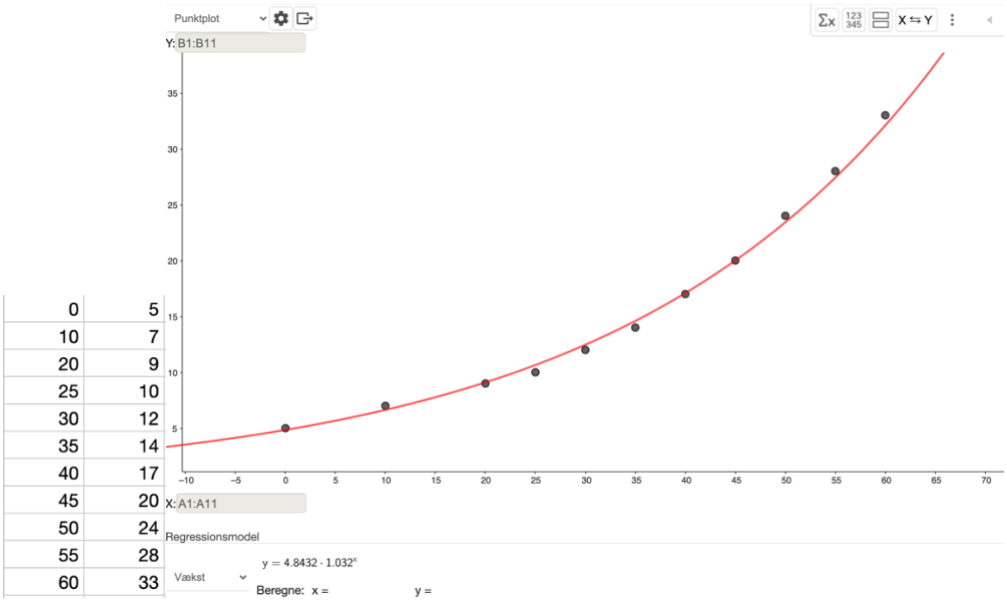
hvor x er antal år efter 1960, og $f(x)$ er indbyggertallet i mio.

a) Bestem tallene a og b ved eksponentiel regression.

b) I hvilket år vil indbyggertallet komme over 50 mio., hvis udviklingen fortsætter?

a)
Jeg importerer data fra bilaget til et regneark i Geogebra og laver eksponentiel regression:

(Kaldet "Vækst" i Geogebra. Jeg har forinden indstillet antallet af decimaler i Geogebra til 4)



0	5
10	7
20	9
25	10
30	12
35	14
40	17
45	20
50	24
55	28
60	33

Altså er $a = 1,032$ og $b = 4,8432$.

b)
Jeg skal bestemme det år, hvor indbyggertal kommer over 50 mio., hvis udviklingen fortsætter. Regressionen har givet modellen $f(x) = 4,8432 \cdot 1,032^x$, og da $f(x)$ er indbyggertallet, målt i mio., indsætter jeg 50 på $f(x)$'s plads og isolerer x:

$$50 = 4,8432 \cdot 1,032^x$$

⇕ *Ligningen løses for x vha. WordMat.*

$$x = 74,11258$$

Da x er antal år efter 1960, vil indbyggertallet komme over 50 mio. i løbet af år 2034.

YouTube Kort gennemgang af opgaven.

Til toppen